EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

19e JAARGANG 1942/43

Nr. 5, 6

Prijs per Jaargang f 6.30*.
Voor intekenaars op het Nieuw
Tijdschrift v. Wiskunde f 5.25*.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 6,30*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6,30*) zijn ingetekend, betalen *f* 5,25*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en Wimecos (Vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en de cosmographie aan H.B.S. 5-j. c. B, lycea en meisjes H.B.S. 5—6 j. c.) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 1,85* op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van Wimecos storten hun contributie van *f* 1,00 voor het lopende verenigingsjaar (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De contributie voor het jaar 1 September 1943 t/m 31 Augustus 1944 bedraagt *f* 2,50. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 5,25* per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD. blz.

de zijvlakken. Hoe verhoudt zich de inhoud van viervlak $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ tot die van viervlak ABCD?

47. In een viervlak DABC brengt men het vlak aan door het zwaartepunt van het grondvlak, evenwijdig aan de ribben BD en AC. Construeer de doorsnede en bereken de verhouding van de inhouden der delen, waarin dit vlak het viervlak verdeelt. Als D_1 de projectie is van de top op het grondvlak, welke hoek is dan groter, $\angle$ DAC of $\angle$ DAD_1? En waarom?

48. De zwaartepunten van drie der zijvlakken van een viervlak worden op het vierde zijvlak geprojecteerd. Welk deel van de inhoud van het viervlak bedraagt de inhoud van het prisma, waarvan die zwaartepunten en hun projecties de hoekpunten zijn?

49. Bewijs, dat de lijnstukken, die de hoekpunten van het grondvlak van een afgeknotte driezijdige pyramide verbinden met de middens van de overstaande ribben van het bovenvlak, door één punt gaan. Als deze lijnstukken elkaar verdelen in reden van 3 : 1, welk deel is dan de inhoud van de afgeknotte pyramide van de inhoud van de pyramide, die ontstaat door verlenging van de opstaande ribben?

50. Van een afgeknotte pyramide is het grondvlak een parallelogram. Bewijs, dat de lichaamsdiagonalen door één punt gaan.

51. Een kegel is in een bol beschreven. De ronde oppervlakte van de kegel is anderhalf maal de ronde oppervlakte van het bolsegment, waarop de kegel staat. Hoe verhouden zich de hoogten van het bolsegment en van de kegel?

52. Een kegelmantel geeft bij ontwikkeling een halve cirkel met straal a. Bereken de inhoud van de kegel; construeer de asdoorsnede. Welk deel van de oppervlakte van de ingeschreven bol ziet men uit de top? Breng door een gegeven lijn l, die door de top gaat, de beide raakvlakken aan de kegel. Construeer in ware grootte de hoek, die deze raakvlakken met elkaar maken.

53. Door een lijn buiten een bol brengt men vlakken, die de bol snijden. Wat is de meetkundige plaats van de middelpunten der doorsneden van die vlakken met de bol?

54. Van een bolsector is de bolvormige oppervlakte gelijk aan de

kegelvormige oppervlakte. Druk de hoogte van het bolsegment uit in de straal van de bol.

55. In een kegel een bol te construeren.

56. In een regelmatig viervlak wordt een bol beschreven. Welk deel van de oppervlakte van de bol ziet men uit een hoekpunt?

57. Uit een punt P ziet men $^1/_9$ van een boloppervlak; uit een punt Q, dat 1 meter verder van het middelpunt van de bol afligt dan P, ziet men $^1/_8$ van het boloppervlak. Bereken de straal van de bol.

58. Teken twee rechte cirkelkegels op een gegeven vlak V. Wanneer hebben deze een gemeenschappelijk raakvlak? Door welk punt van vlak V gaat dit vlak? Wat is de betekenis van dit punt voor de twee gegeven cirkels in V?
Wat kun't ge nu in V bewijzen over de in- en uitwendige gelijkvormigheidspunten van drie willekeurige cirkels?

59. Teken een rechte cirkelcylinder op vlak V. Neem P en R in V, Q op de cylinder. Teken de doorboringspunten van PQ en eveneens van een lijn l door R evenwijdig met PQ met de cylinder.
Teken in Q de raaklijn aan de cylinder, die l snijdt.

60. Gegeven een halve bol met straal R. In die halve bol is een kubus beschreven, waarvan de hoekpunten van het bovenvlak op het boloppervlak en die van het grondvlak in het platte vlak van de halve bol liggen. Bereken de ribbe van de kubus.

B. *Planimetrie.*

61. Construeer een driehoek, die gelijkvormig is met een gegeven driehoek ABC en waarvan de oppervlakte driemaal zo groot is als die van $\triangle$ ABC.

62. Construeer $x = \sqrt[4]{abcd}$, als a, b, c en d gegeven lijnstukken zijn.

63. Construeer een hoek van 12°.

64. Verander een driehoek in een gelijkbenige met dezelfde tophoek en met gelijke oppervlakte.

65. Van $\triangle$ ABC zijn de voetpunten D en E van de hoogtelijnen AD en BE in ligging gegeven. Verder is bekend, dat de basis AB moet liggen op een gegeven rechte l. Construeer $\triangle$ ABC.

66. Construeer een regelmatige tienhoek, die even groot is als een gegeven vierhoek.

67. Construeer een regelmatige vijfhoek, als de macht van het snijpunt van twee diagonalen t.o.v. de omgeschreven cirkel gegeven is.
68. Construeer △ ABC, als gegeven zijn ∠ A, h_c en $2s$ (de omtrek).
69. Construeer $x = a\sqrt{\frac{b(-3+2\sqrt{5})}{c}}$ als a, b en c gegeven lijnstukken voorstellen.
70. Construeer een cirkel zo, dat vier gegeven punten A, B, C en D gelijke afstanden tot de omtrek hebben.
71. Verdeel een trapezium ABCD (AB // CD) in twee delen, door een lijn evenwijdig met AB zo, dat die delen gelijkvormig zijn. Zijn die delen dan ook gelijkvormig met ABCD? Bewijs, dat de oppervlakten van die delen gelijk zijn aan de oppervlakten van de delen, waarin een diagonaal het trapezium verdeelt.
72. Construeer in een gegeven cirkelsegment een vierkant zo, dat twee hoekpunten op de koorde en twee op de boog liggen.
73. Construeer $x = a\sqrt[4]{3}$ als a een gegeven lijnstuk is.
74. Contrueer een driehoek, als gegeven zijn: de tophoek, de zwaartelijn uit de top, terwijl de basis $b = \sqrt[4]{p^4 - q^2r^2}$ is; p, q en r zijn gegeven lijnstukken.
75. Om een cirkel een gelijkbenig trapzium te beschrijven, waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een vierkant met zijde a.

76. In de rechthoekige △ ABC (∠ C = 90°) is D het voetpunt van de hoogtelijn uit C. Door D trekt men een lijn DQ (Q op CB) en loodrecht daarop DP (P op AC). Bewijs, dat de vorm van △ PDQ onveranderd blijft, als Q de zijde CB doorloopt. In welke stand is opp. △ PDQ = ½ opp. △ ABC?
77. In △ ABC trekt men de hoogtelijnen AD en BE, die elkaar in H snijden; bewijs, dat AH × HD = BH × HE is. Waarom liggen de punten A, B, D en E op een cirkel? Bewijs omgekeerd, dat dit laatste altijd het geval is, als gegeven is, dat AH × HD = BH × HE is en de punten niet op een rechte liggen.
78. In een halve cirkel met AB als middellijn trekt men AD zo, dat boog AD = 60° en BC zo, dat bg BC = 45° is. Druk de lengte van DC uit in de straal R van de cirkel.
79. Gegeven de gelijkzijdige △ ABC (AB = AC = BC = a) met

zijn omgeschreven cirkel. Op de boog BC tegenover de top A neemt men een punt P; BP snijdt, verlengd, het verlengde van AC in R; CP snijdt, verlengd, het verlengde van AB in Q. Bewijs, dat BQ × CR constant is, als P boog BC doorloopt.

80. Men verlengt de hoogtelijnen AD, BE en CF van △ ABC tot zij de omgeschreven cirkel opv. in P, Q en R snijden. Bewijs, dat bg AQ = bg AB, enz.; vervolgens, dat HD=DP, HE=EQ en HF=FR is. Trek nu de middellijn AML en verbind het hoogtepunt met L. Bewijs, dat HL het lijnstuk BC middendoor deelt. Laat tevens zien, dat de zwaartelijn uit A door HM (lijn van Euler) in de verhouding 2 : 1 wordt verdeeld. Door welke negen punten gaat dus de cirkel, die verkregen wordt door de omgeschreven cirkel uit H als centrum met ½ te vermenigvuldigen?

81. Van △ ABC is gegeven AC = BC. Bewijs:
1e. dat $r \times r_c = \frac{1}{4} AB^2$ (r = straal ing. cirkel; r_c = straal aang. cirkel aan AB).
2e. dat de cirkel door B en C, die AB raakt, gelijk is aan de omgeschreven cirkel.
3e. bereken de verhouding $\frac{AB}{BC}$, als ∠ C = 36° is.

82. Op de zijde AB van △ ABC neemt men een punt P en op AC een punt Q. Als nu AP : AB = AQ : AC, dan is PQ // BC. Bewijs dit. Waar zal de lijn PQ bij verlenging BC snijden, als gegeven is, dat AP : PB = 4 : 5 en AQ : QC = 5 : 4?

83. In een halve cirkel met middellijn AB is de lijn CD ⊥ AB gegeven (C op AB, D op de cirkelomtrek). Construeer een cirkel in de figuur, begrensd door de rechten AC, CD en de boog AD.

84. In △ ABC is D een willekeurig punt van de basis; M_1 is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van △ ADC, M_2 dat van de omgeschreven cirkel van △ BDC.
Bewijs, dat △ M_1DM_2 niet van vorm verandert, als D langs AB loopt en toon aan, dat die twee cirkels elkaar altijd onder een hoek = ∠ C snijden.

85. Gegeven twee elkaar snijdende cirkels M en N; hun gemeenschappelijke snijlijn is AB. Op het verlengde van AB neemt men een punt P; men trekt door P een rechte, die cirkel M in C en D, en een rechte, die cirkel N in E en F snijdt. Bewijs, dat de punten C, D, E en F op een cirkel liggen.

86. Een cirkel O raakt de cirkels M en N uitwendig, opv. in A en B. De centraal MN snijdt de cirkels M en N opv. in C en D. Bewijs, dat de punten A, B, C en D op een cirkel liggen. Hoe zou men dus, als de cirkels M en N en op cirkel M het punt A gegeven waren, de cirkel O kunnen construeren, die cirkel N raakt en cirkel M in A raakt?

87. Bewijs, dat een zeshoek ABCDEF een raaklijnenzeshoek is, als alle zijden gelijk zijn en $\angle A = \angle C = \angle E$ is.

88. In een raaklijnentrapezium ligt het snijpunt der diagonalen op één rechte met de raakpunten op de benen. Bewijs dit.

89. In een cirkel trekt men twee onderling loodrechte stralen MA en MB. P ligt op het verlengde van MB, Q op het verlengde van MA, terwijl AP en BQ elkaar op de cirkel snijden. Bewijs, dat $AQ \times BP = 2r^2 = (r\sqrt{2})^2$ is. (r is de straal).

90. In de uiteinden van een middellijn AB trekt men de raaklijnen aan een cirkel met middelpunt M. Een willekeurige lijn snijdt de raaklijn in A in punt C, de cirkel in E en F en de raaklijn in het uiteinde B in D; C, E, F en D liggen aan dezelfde kant van AB. De loodlijnen in E en F op CD opgericht, snijden AB opv. in P en Q. Bewijs, dat $\angle CPD = \angle CQD = 90°$ is.

91. Teken een cirkel met straal r en in deze cirkel twee stralen MA en MB, die een hoek van 120° met elkaar maken. Verbind B met het midden van MA. Deze lijn snijdt de cirkel nogmaals in C. Druk de lengte van BC uit in r.

92. In $\triangle$ ABC is de hoogtelijn uit A gelijk aan de zijde a. In de driehoek beschrijft men een rechthoek PQRS, zodat PQ// BC is (P op AB, Q op AC). Bepaal PQ zo, dat:
1e. de oppervlakte van PQRS zo groot mogelijk is;
2e. QS zo klein mogelijk is.

93. Gegeven een cirkel met straal $2\frac{1}{2}$ en een punt P op een afstand $6\frac{1}{2}$ van het middelpunt M. De lijn PM snijdt de cirkel in A en B (A tussen P en M). Een der raaklijnen uit P raakt de cirkel in C. Gevraagd de koorde AC te berekenen.

94. Gegeven $\triangle$ ABC. Daarin is de zwaartelijn AD getrokken en een lijn BE, die de zijde AC in het punt E zo snijdt, dat $AE = \frac{2}{3}$ AC is. De lijnen AD en BE snijden elkaar in O. Bereken het quotiënt $\dfrac{\text{opp. EODC}}{\text{opp. ABC}}$.

95. Gegeven △ ABC.
a. Construeer op AC een punt D zo, dat CD het grootste stuk van de in uiterste en middelste reden verdeelde zijde AC is.
b. Trek DE // AB. Bewijs, dat CE en DE in dezelfde betrekking staan tot BC en AC.
c. Bewijs, dat DE de oppervlakte van △ ABC in uiterste en middelste reden verdeelt; dat nu echter het grootste stuk aan AB grenst.

96. Van △ ABC is AB = 21, BC = 20, AC = 13 cm. Op AB neemt men AD = 12 cm en beschrijft met CD als middellijn een cirkel, die AC in E snijdt. Bereken EC.

97. Van △ ABC (basis AB) zijn de zijden AC = 6, CB = 8, AB = 10. Bereken de afstand M_oM_i van de middelpunten van de om- en de ingeschreven cirkel. Wat is de meetkundige plaats van M_i, als C de halve cirkel op AB doorloopt? Bewijs door berekening, dat $\angle AM_iM_o = 90°$ is.

98. In △ ABC trekt men de hoogtelijnen AD en BE en verbindt E met D. Bewijs, dat opp. △ CED = ½ opp. △ ABC is, als $\angle C = 45°$ is. Laat ook zien, dat de omgeschreven cirkels van △ CED en van vierhoek AEDB even groot zijn. Onder welke hoek snijden deze cirkels elkaar?

99. In een koordenvierhoek laat men uit het snijpunt der diagonalen loodlijnen neer op de zijden. Bewijs, dat de vierhoek, die de voetpunten tot hoekpunten heeft, een raaklijnenvierhoek is.

100. Eén trapezium is in een halve cirkel beschreven (straal R). De middellijn is een der evenwijdige zijden, de andere is $2x$. Verder kan in dat trapezium een cirkel worden beschreven. Druk eerst de straal r van de ingeschreven cirkel uit in R en x en vervolgens x in R. Construeer ten slotte x.

II. ALGEBRA.

1. De vorm $x^4 - ax^3 - (6a + 5b)\,x^2 + abx + 144$ is deelbaar door $x^2 + 6x + 8$. Bepaal a en b en ontbind daarna de vorm in factoren van de 1e graad in x.

2. $x^{20} - 4x^{11} + 5x - 3$ wordt gedeeld door $x\,(x - 1)\,(x + 1)$. Bepaal de rest zonder de deling uit te voeren. (Denk om de algemene gedaante van de rest).

3. De vorm $f(x) \equiv 3x^3 + ax^2 + 13x + b$ laat bij deling door $x^2 - x - 6$ tot rest $47x + 99$. Bepaal a en b en los daarna de vergelijking $f(x) = 0$ op.
4. De vorm $ax^2 + bx + c$ wordt nul voor $x = 4$ en voor $x = 1$ en laat bij deling door $x—5$ tot rest 12. Bepaal a, b en c.
5. Ontbind $a^{12} - b^{12}$ in factoren.

   Schrijf de uitkomst op van het quotient $\dfrac{a^{12} - b^{12}}{a^3 + b^3}$.

   Noem de merkwaardige quotienten en leid ze af.
6. Van een opgaande deling is de deler $x^2 - x - 2$ en het deeltal $x^4 + ax^2 + bx + c$. Wanneer men het quotient deelt door $x - a$ wordt de rest $-b$. Bepaal a, b en c.
7. Van de vergelijking $4x^5 - 22x^4 + 30x^3 + px^2 - 34x + 12 = 0$ is een der wortels 3. Bepaal p en de andere wortels. Bewijs, dat een veelterm, die nul wordt voor $x = 3$, deelbaar is door $x - 3$.
8. Bewijs, dat $17\,(x^{23} - 1) - 23\,(x^{17} - 1)$ deelbaar is door $(x - 1)^2$.
9. Gegeven de breuk

$$\frac{x^2 + (p - 2)\,x - p}{x^3 + (m + 2)\,x^2 - (8\,m + 2)\,x - 120}.$$

   De noemer is deelbaar door $x - 5$. Bepaal m en daarna de waarde van p, waarvoor de breuk te vereenvoudigen is. Noem en bewijs de reststelling.
10. Van een deling is het deeltal $x^4 + ax^3 - bx^2 + (a + 1)\,x + c$, de deler $x^2 - 3x + 2$ en de rest $-x + 3$. Bepaal a, b en c, als ge weet, dat het quotient door $x + 1$ deelbaar is.
11. Bewijs, dat $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$ deelbaar is door 17.
12. Van de vergelijking $x^3 - ax^2 - 13x + 5a = 0$ is $x_1 = 5$. Bepaal a en vervolgens $x_2^3 + x_3^3$. (Reststelling!)
13. De vorm $\dfrac{m\,(x - 2)}{x^4 - ax^2 + a - 1}$ is onbepaald voor $x = 2$ en heeft als x tot 2 nadert tot grenswaarde ½. Bepaal a en m. Splits daarna de vereenvoudigde breuk in de som van drie breuken:

$$\frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}.$$

14. Van de vergelijking $ax^3 - x^2 - abx + b = 0$ is één der wortels -3, terwijl de twee andere wortels elkaars omgekeerde zijn. Bepaal a en b en de andere wortels.

15. Bepaal m zodanig, dat de breuk $\frac{x^2+(m-3)x-20}{x^3-mx^2-x+m}$ vereenvoudigd kan worden.

16. Bewijs, dat $a^3+b^3+c^3-3abc$ deelbaar is door $a+b+c$ en bepaal het quotient zonder de deling uit te voeren.

17. Een gehele rationele algebraische functie van x geeft bij deling door $x-1$, $x-2$ en $x-3$ opv. tot rest 1, 2 en 3. Bepaal de rest bij de deling door $(x-1)(x-2)$ en door $(x-1)$. $(x-2)(x-3)$. Wat betekenen de woorden „geheel", „rationeel" en „algebraïsch" precies?

18. De vorm $V \equiv x^5+ax^4+5(a-b).x^3-(a+3b)x^2+ +bx+12$ is deelbaar door x^2-x-2. Bepaal a en b. Los daarna de vergelijking $V=0$ op.

19. Bepaal a, b en c zodanig, dat de vorm $(a+b)x^2+(2a+b).xy+cy^2-x+13y-15$ deelbaar is door $2x-y+5$.

20. De vergelijkingen $5x^3-5ax^2-2(3a-10)x+24a=0$ en $x^2-ax+4=0$ hebben één gemeenschappelijke wortel. Bepaal a en los de vergelijkingen op.

21. De grafiek van $y=ax^2+bx+c$ gaat door de punten $(1, -2)$ en $(2, -1)$, terwijl de uiterste waarde van de functie wordt bereikt voor $x=2$. Bepaal a, b en c en teken de grafiek.

22. De grafiek van de functie $y=ax^2+bx+c$ snijdt de X-as in A $(-4,0)$ en B $(+2,0)$ en de Y-as in C $(0,-8)$.
Bepaal a, b en c en schets de grafiek. Daarna ook die van

$$y=\frac{1}{ax^2+bx+c}.$$

23. Gegeven de vergelijking $x^2+mx+2m-14=0$. Voor welke waarde van m is de som van de kwadraten der wortels minimum?

24. Van de functie $y=ax^2+4(a+3)x+9a+17$ (a reëel) is de maximumwaarde gelijk aan de abscis van het maximum. Bereken a.

25. De vorm ax^2+bx+c bereikt zijn uiterste waarde voor $x=-1$ en geeft bij deling door $(x+2)$ tot rest 9. Verder kan de vorm ontbonden worden in twee gelijke factoren van de eerste graad in x. Bepaal a, b en c.

26. Als voor alle waarden van x geldt:

$$(p + 1)\, x^2 - 2\,(p - 1)\, x + 3p - 3 < 0,$$

welke waarden moet p dan hebben?

27. Bewijs, dat alle parabolen van het stelsel

$$y = (a + 1)\, x^2 - (a - 1)\, x - (2a + 3)$$

door twee vaste punten gaan.

28. Bepaal m zo, dat de rechte $y = mx$ raakt aan de parabool $y = x^2 - 3x + 4$.

29. Voor welke waarden van m kan

$$(m - 2)\, x^2 - 2\,(m - 1)\, x + 3m - 5$$

niet nul worden voor reële waarden van x?

30. De functie $y = ax^2 + bx - 42$ bereikt zijn maximum voor $x = -3$ en dit maximum is gelijk aan $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + x^2 - 7x + 2}{x^2 - x - 2}$.

Bepaal a en b en maak een grafiek van de functie.

31. Stel een kwadratische functie op, waarvan het maximum 6 bedraagt en waarvan de grafiek de Y-as in $y = -3$ snijdt.

32. Voor welke punten (x, y) in het platte vlak is

$$z^2 - (5x - 7y - 4)\, z - (5x - 7y - 4) > 0$$

als z reëel is.

Door welke roosterpunten gaat de rechte $5x - 7y = 4$? Bewijs, dat de rechte $5x - 10y = 4$ door geen der roosterpunten gaat.

33. De functies $y = 3x^2 - 2ax + 3a$

en $y = 2x^2 + (a - 2)\, x + \frac{1}{2}a^2 - 10$

hebben een even groot minimum. Bepaal a.

34. In een driehoek beschrijft men een rechthoek met twee hoekpunten op de basis en twee hoekpunten op de opstaande zijden. Als de hoogte van de rechthoek x is, voor welke waarde van x is dan de oppervlakte van de rechthoek maximaal?

35. Voor welke waarden van a zal de functie

$$y = ax^2 - (a - 1)\, x - (a + 2)$$

voor elke x negatief zijn?

36. In welk deel van het platte vlak liggen de punten, waarvoor

$$(y - x^2)\,(y - x - 1) > 0 \text{ is?}$$

37. Men zet op een lijnstuk a aan weerskanten een lijnstuk x af en maakt nu een rechthoek met het middelste stuk tot basis en de uiterste stukken tot opstaande zijden. Voor welke waarde van x is de oppervlakte van die rechthoek zo groot mogelijk?

38. Door welk punt gaan alle parabolen, voorgesteld door

$$y = x^2 - (a - 3)\,x - (a - 3)?$$

39. Bepaal a zo, dat het minimum van

$$y = ax^2 - 4x + (2a + 1)$$

gelijk is aan $a + 1$.

40. Gegeven de functie $y = x^2 - ax + (a - 2)$ (a is een willekeurig reëel getal.

a. Bewijs, dat de grafiek van deze functie steeds twee verschillende punten met de X-as gemeen heeft, onverschillig hoe men a kiest.

b. Toon aan, dat de top van de grafiek op zijn minst op een afstand 1 beneden de X-as ligt.

c. Teken de grafiek, waarvan de top op deze minimum-afstand 1 beneden de X-as ligt.

41. Onderzoek de grafiek van

$$y = \frac{x - 1}{x^2}.$$

42. Schets de grafiek van $y = x\,(x - 1)\,(x - 2)$.
Bepaal m zodanig, dat $y = mx$ de kromme $y = x\,(x - 1)\,(x - 2)$ raakt. Welke twee mogelijkheden doen zich voor?

43. De functie $y = x + 1 - \dfrac{1}{x - \beta}$ heeft geen grenzen. Bewijs dit algebraïsch en tracht het ook grafisch te illustreren.

44. Onderzoek de grafiek van

$$y = \frac{-2x + 3}{x^2 - 6x + 9}.$$

45. De grafiek van de functie $y = \dfrac{8x + 7}{x^2 + ax + b}$ heeft twee asymptoten evenwijdig aan de Y-as, nl. $x = -1$ en $x = -2$. Bepaal a en b en teken de grafiek.

46. Schets de grafiek van

$$y = \frac{3x - 4}{x + 4}.$$

47. Als we beschouwen de vergelijkingen $y = x^2 - 6x + 10$, $y = x^2 - 6x + 8$, $y = -x^2 + x$, $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$, $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$, dan merken we op, dat bij elke reële waarde van x ook een reële waarde van y hoort. (Waarom?) Ga nu na, of bij deze

vergelijkingen ook het omgekeerde geldt, m.a.w. of ook x reëel is, zolang y dit is. Toelichting door middel van grafieken.

48. Beantwoord dezelfde vraag, als in (47) ook voor:

$$y = x + \frac{1}{x-1},\ y = x - \frac{1}{x-1},\ y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3}.$$

Wat kunt ge in dit verband opmerken van $y = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$, $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 - 3xy - 10y^2 = 0$?

Welke grafieken staan met deze vergelijkingen in verband?

49. De functie $y = \frac{x^2 - 2x + p}{x^2 - 8x + 15}$ heeft 10 als uiterste waarde. Bepaal p en onderzoek de grafiek van de functie.

50. Voor welke waarden van x ligt de waarde van de functie $y = 5^{\frac{1}{x^2-x-5}}$ tussen 1 en 5?

51. Schets de grafiek van de functie

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}.$$

52. Leid de grafiek van $y = 2^{x^2+1}$ af uit die van $y = x^2 + 1$.

53. Welke ligging hebben $y = 2x - 1 + \frac{1}{x-3}$ en $y = 2x - 1$ ten opzichte van elkaar?

Vergelijk evenzo de grafieken van

$$y = 2x - 1 \quad \text{en} \quad y = 2x - 1 + x^2.$$

54. Schets de grafiek van

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}.$$

55. Wanneer heeft de grafiek van $y = \frac{x^2 - ax + b}{x - c}$ een verticale asymptoot en wanneer niet? Als deze aanwezig is, wanneer zal dan de grafiek de X-as niet snijden? Hoe verandert y dan van teken? Bevestig algebraïsch, dat de kromme dan een maximum en een minimum heeft.

56. De grafiek van de functie

$$y = \frac{ax^2 + (b-1)x - 6}{x^2 + (a+3)x - (2b+1)}$$

snijdt de X-as in A $(+2,0)$ en heeft voor $x = -5$ een verticale asymptoot. Bepaal a en b en schets de grafiek.

57. Gegeven: $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$.
Bereken de uiterste waarden van x èn van y.

58. Onderzoek de grafiek van de functie $y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 4}$.

59. De grafiek van een gebroken lineaire functie heeft $x = -3$ tot asymptoot, snijdt de X-as in $(-3\frac{1}{2},0)$ en de Y-as in $(0,2\frac{1}{3})$. Bepaal de functie en teken de grafiek. Onderzoek of de lijn $x + y = 1$ de grafiek snijdt of raakt.

60. Schets de grafiek van

$$y = \frac{(x+5)(x-3)}{x-4} = x + 6 + \frac{9}{x-4}.$$

61. Gegeven de vergelijking:

$$(a^2 + 2)\, x^2 + (a + 1)\,(a^2 - 4a) = 0.$$

Voor welke reële waarden van a heeft het product der wortels een uiterste waarde?

62. Schets de grafiek van

$$y = \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 1}.$$

63. Bepaal a zodanig, dat de grafiek van $y = \frac{x^2 - 4x + a}{x\,(x-4)}$ de X-as raakt. Na substitutie van de gevonden waarde van a de grafiek te tekenen.

64. Bepaal de maxima met de bijbehorende abscissen van de functie:

$$y = 5 - (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)^2.$$

65. Ga het teken na van $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4x - 5}$ door een grafische voorstelling te maken van teller en noemer afzonderlijk.

66. Voor welke waarden van x is $\frac{2x + 10}{x - 3} > \frac{x + 11}{x - 4}$?

67. Voor welke waarden van x is $\frac{x}{x - 1} < \frac{3}{x + 1}$?

68. Voor welke waarden van x is $\frac{5x + 4}{x^2 + x + 1} > x$?

69. Voor welke waarden van x is

$$-3 < \frac{x^2 - 4x - 6}{x^2 - 5x + 6} < +3\,?$$

70. Voor welke waarden van x is:

$$\frac{x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} > \frac{8a^2}{x^2-a^2}?$$

71. Als voor alle waarden van x geldt:

$$(p+1)\,x^2 - 2\,(p-1)\,x + 3p - 3 < 0,$$

welke waarden moet p dan hebben?

72. Voor welke reële waarden van x is

$$\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > 1000?$$

73. Voor welke waarden van x is

$$\frac{2x-5}{x-1} > 3?$$

74. In welk geval is $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ onafhankelijk van x? Voor welke waarden van a is $\dfrac{(a-1)\,x+3a+1}{x+(a^2+a+1)}$ onafhankelijk van x?

75. Voor welke waarden van x bestaat $\sqrt{x^2-3x-10}$ niet? Dezelfde vraag voor $\sqrt{-x^2+x+30}$.
Schrijf een wortelvorm op, die voor alle waarden van x bestaat.
Bepaal: $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+3x+10} - \sqrt{x^2-3x-10})$. Denk daarbij aan de herleiding van $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$.

76. Herleid:

$$\frac{\sqrt[4]{a^6b^2}\,.\,c\sqrt{c}}{\sqrt[3]{c^2}} : \frac{c^{-\frac{1}{2}}\,a^0}{b^{-6}}.$$

77. Gegeven $\sqrt{7-2\sqrt{(a+1)\,(6-a)}}$, waarin a een reëel getal is.
Voor welke waarden van a is deze vorm reëel?
Voor welke waarden van a geldt:

$$\sqrt{7-2\sqrt{(a+1)\,(6-a)}} = \sqrt{6-a} - \sqrt{a+1}?$$

78. Wanneer zal $\sqrt{4-2\sqrt{-60+16a-a^2}}$ een reëel getal voorstellen? Trek deze wortel.

79. Wat is het grootst $\sqrt[3]{3}$ of $\sqrt{2}$? Laat zien, dat $\sqrt{2}$ onmeetbaar is. Laat ook zien, dat x, voorkomend in de vergelijking $2^x = 9$ niet meetbaar kan zijn. Hoeveel is x ongeveer?

80. Voor welke waarden van x is de functie

$$\sqrt{4 - \sqrt{-9x^2 + 36x - 11}} \quad \text{reëel?}$$

81. Bepaal $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x - 1) - \sqrt{x^2 - 2x + 7}]$.

82. Bepaal $\lim\limits_{x \to +1} \dfrac{\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[9]{x} - 1}$.

83. Wanneer zijn $\sqrt{3x^2 + 5x - 8}$ en $\sqrt{3x^2 + 2x - 5}$ reëel?

Waartoe nadert $\dfrac{\sqrt{3x^3 + 5x - 8}}{\sqrt{3x^2 + 2x - 5}}$, als x tot 1 nadert?

Waartoe nadert $\sqrt{3x^2 + 5x - 8} - \sqrt{3x^2 + 2x - 5}$, als x tot $+\infty$ nadert?

84. Los x en y op uit:

$$\begin{cases} x + y = -\sqrt{x + y} + 12 \\ x^3 + y^3 = 243 \end{cases}$$

85. Los x op uit:

$$\sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 6} = \sqrt{2x + 5}$$

86. Los x op uit:

$$\tfrac{1}{2} R (\sqrt{5} - 1) = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

87. Los x op uit:

$$\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x - 3} = \sqrt{x}$$

88. Los x op uit: $\sqrt[3]{x} = 6 + \sqrt[6]{x}$.

Geldt steeds $\sqrt{(x - 2)^2} = \left(\sqrt{x - 2}\right)^2$?

89. Los x op uit:

$$(17x^2 + 83x - 100) \{(x - 3)^{1/2} + (x + 2)^{1/2}\} =$$
$$= (17x^2 + 83x - 100)\ (3x + 4)^{1/2}.$$

90. Los x op uit:

$$x + 3 + \sqrt{\frac{x + 3}{x - 3}} = \frac{20}{x - 3}.$$

91. Van de vierkantsvergelijking $x^2 - 5x + 2\alpha = 0$ zijn de wortels x_1 en x_2. Voor welke waarden van α zijn x_1 en x_2 reëel? Voor welke waarde van α geldt: $x_1 : x_2 = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} : 1$.

92. Gegeven de vergelijking:
$(a + 4)\, x^2 + 3\,(a - 3)\, x + 3a - 9 = 0$ (a reëel).
Voor welke waarden van a zullen:
1. de wortels verschillend teken hebben?
Is de voorwaarde $x_1\, x_2 < 0$ noodzakelijk? Voldoende?
2. de wortels beide positief zijn?
Is de voorwaarde $x_1\, x_2 > 0$ noodzakelijk? Voldoende?
3. de wortels beide negatief zijn?

93. De vierkantsvergelijking $x^2 + px + q = 0$ heeft tot wortels x_1 en x_2. Stel een vierkantsvergelijking op, die tot wortels heeft: $x_1^2 + x_2^{-3}$ en $x_2^2 + x_1^{-3}$.

94. x_1 en x_2 zijn de wortels van $x^2 - ax + b = 0$;
y_1 en y_2 zijn de wortels van $y^2 - 7y - 5b = 0$
$y_1 = x_1^2 + 1$; $y_2 = x_2^2 + 1$. Bepaal a en b.

95. Vermindert men beide wortels van $x^2 - 18x + p = 0$ met a, dan verkrijgt men de wortels van de vergelijking $x^2 - 7ax + 48 = 0$. Bepaal a en p.

96. $x^2 + x + 1 = 0$ heeft tot wortels x_1 en x_2. Laat zien, dat $x_1 \neq x_2$ is zonder eerst x_1 en x_2 te berekenen.
Stel een nieuwe vierkantsvergelijking op met wortels x_1^2 en x_2^2. Men vindt $x^2 + x + 1 = 0$; wat is dus de conclusie?
Bepaal eens twee verschillende getallen, die elkaars kwadraat zijn. Laat zien, dat $x_1^3 = 1$ is. Hoeveel is nu x_1^8?

97. Als $x^2 + px + q = 0$ is, vraagt men af te leiden, dat $(x_1^n + x_2^n) + p\,(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + q\,(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = 0$, wanneer x_1 en x_2 de wortels zijn van de eerste vergelijking.

98. Gegeven de vergelijking $(a - 1)\, x^2 - (a - 1)\, x - (2a - 1) = 0$. ($a$ reëel). De wortels zijn x_1 en x_2.
Voor welke waarden van a zal $x_1 > 2$ en $x_2 < -3$ zijn? (x_1 en x_2 niet berekenen).

99. Men vraagt een vergelijking met wortels x_1 en x_2 als $x_1 = x_2^2$ en $x_1^3 + x_2^3 = 756$.

100. Gegeven de vergelijking $x^2 - ax + b = 0$ met wortels x_1 en x_2, en de vergelijking $y^2 - (b + {}^3/_2)\, y + a = 0$ met wortels y_1 en y_2. Verder is bekend, dat $y_1 = \frac{1}{x_1} + 1$ is en $y_2 = \frac{1}{x_2} + 1$.
Bepaal a en b.

101. Toon aan, dat de wortels van $x^2 - (a - 1)\, x - (a + 2) = 0$ voor alle waarden van a bestaanbaar en verschillend zijn. Bepaal het minimum van $x_1 - x_2$ ($x_1 > x_2$).

102. Bepaal een vergelijking van de 4e graad, die tot wortels heeft de kwadraten en de derde machten van de wortels van $x^2 + 3x + 1 = 0$.

103. Gegeven de vergelijking $ax^2 — (2a — 1)\ x — (a — 1) = 0$.
Voor welke waarden van a is $\frac{1}{x_1 — a} + \frac{1}{x_2 — a}$ positief?
x_1 en x_2 zijn de wortels van de vergelijking.

104. Gegeven is, dat a, b en c rationaal zijn, terwijl $a + b + c = 0$ is. Bewijs, dat de vergelijkingen $A\ x^2 + B\ x + C = 0$, waarin A, B en C elk één der waarden a, b en c heeft, rationale wortels hebben.

105. De vergelijking $x^3 — (a + b)\ x + b = 0$ heeft een wortel 2, terwijl de som van de derde machten der twee andere wortels — 26 bedraagt. Bepaal a en b en los de vergelijking op.

106. Bepaal, liefst uit het hoofd, de wortels van de volgende vergelijkingen:

$$17x^2 + 13x = 30;$$
$$x\ (x + 1) = 90;$$
$$x + \frac{1}{x} = 4\tfrac{1}{4};$$
$$x^2 + x — 2 — \sqrt{2} = 0;$$
$$x^2 — (\sqrt{3} — 1)\ x — \sqrt{3} = 0;$$
$$x^2 + x = \tfrac{3}{4};$$
$$3x^2 — 10x + 3 = 0;$$
$$x^2 + x = 6.$$

107. Schat de wortels van $ax^2 — 2x + 3 = 0$, als $a = 0{,}000001$ is. Wat gebeurt er met de wortels van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ als men opv. c, b of a tot nul laat naderen? Toon aan, dat één wortel oneindig groot wordt, als a tot nul nadert, door de vergelijking te vervangen door een, waarvan de wortels het omgekeerde zijn van die van de eerste vergelijking.

108. De wortels van de vergelijking $x^2 — 2\ (p + 1)\ x — 67\tfrac{1}{2}p = 0$ zijn s maal zo groot als die van $x^2 — px — 7\tfrac{1}{2}p = 0$. Bepaal s en p.

109. De vierkantsvergelijking $x^2 + px + q = 0$ gaat over in een zuivere vierkantsvergelijking, als men de wortels met 3 vermeerdert en in een onvolledige, als men de wortels met 3 vermindert. Bepaal p en q.

VERSCHENEN:

Dr P. MOLENBROEK

LEERBOEK

DER

VLAKKE MEETKUNDE



NEGENDE DRUK

Geb. f 12.00*.

P. NOORDHOFF N.V. — 1943 — GRONINGEN - BATAVIA
OOK VERKRIJGBAAR DOOR DE BOEKHANDEL

TEKENS EN NOTATIES.

$\perp$	betekent:		loodrecht op.
//	„		: evenwijdig aan.
$\angle$	„		: hoek.
∡	„		: gerichte hoek van twee halve rechten.
⋈	„		: schaar = gerichte hoek van twee rechten.
$\triangle$	„		: driehoek.
$\odot$	„		: cirkel.
∽	„		: gelijkvormig.
≌	„		: gelijk en gelijkvormig of congruent.
A B	stelt voor		een rechte.
$\overline{AB}$	„	„	een lijnstuk.
A B of $l(\overline{AB})$	stelt voor		de lengte van het lijnstuk A B.
[A B	stelt voor		een halve rechte met A als eindpunt.
$\overrightarrow{AB}$	„	„	een gericht lijnstuk.
$(\overrightarrow{AB})$	„	„	het kental van A B.
$\widehat{AB}$	„	„	de boog A B.
$\overrightarrow{ABC}$	„	„	de gerichte oppervlakte van $\triangle$ A B C.
(A B P)	„	„	de deelverhouding $\overrightarrow{PA} : \overrightarrow{PB}$.
A(B C D)	„	„	de sinusverhouding sin ∡ A(D B) : sin ∡ A(DC).
(A B C D)	„	„	de dubbelverhouding $(ABC):(ABD) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$.
T(A B C D)	„	„	de dubbelverhouding van de vierstraal T(A, B, C, D).
μ(P, C)	„	„	de macht van P t.o. van cirkel C.

HET GRIEKSE ALPHABET.

α	A	alpha	*a*	ν	N	nu	*n*
β	B	bêta	*b*	ξ	Ξ	xi	*x*
γ	Γ	gamma	*g*	o	O	omikron	*o*
δ	$\varDelta$	delta	*d*	π	$\varPi$	pi	*p*
ε	E	epsilon	*e*	ϱ	P	rho	*r*
ζ	Z	zêta	*z*	σ of ς	$\varSigma$	sigma	*s*
η	H	êta	*ê*	τ	T	tau	*t*
ϑ of θ	$\varTheta$	thêta	*th*	υ	$\varUpsilon$	upsilon	*u*
ι	I	iota	*i*	φ	$\varPhi$	phi	*ph*
$\varkappa$	K	kappa	*k*	χ	X	chi	*ch*
λ	$\varLambda$	lambda	*l*	ψ	$\varPsi$	psi	*ps*
μ	M	mu	*m*	ω	$\varOmega$	omega	*oo*

UIT HET VOORBERICHT BIJ DE ACHTSTE DRUK.

Deze herdruk wijkt sterk af van de vorige; het boek is, ook in letterlijke zin, geheel opnieuw geschreven; het is niet doenlijk alle of maar een deel van de veranderingen aan te geven. We willen volstaan met het volgende.

De grondslagen zijn in het boek behoorlijk gelegd; voor een eerste beoefening ruimschoots voldoende. Aan het eind van de studie kan degene, die behoefte gevoelt aan een stevige axiomatische grondslag, bevrediging vinden in hoofdstuk XXIII en in het daar genoemde boek van Prof. VAN DER WAARDEN.

De volgorde van de stof is in deze druk zo, dat tot en met hoofdstuk XVIII de gewone vlakke Meetkunde wordt afgedaan, maar niet in de oppervlakkige behandeling van de schoolboeken. In die eerste 18 hoofdstukken zal men in theorie en vraagstukken en voorbeelden heel wat vinden, dat enkel past in een studieboek voor volwassenen, hetgeen dit boek wil zijn. Daarna komen de hoofdstukken XIX, XX en XXI met leerstof, die in het bijzonder tot de eisen voor de akten Wiskunde L.O. en KI behoort; daartoe rekenen we ook, wat we schreven over maxima en minima in het nieuwe hoofdstuk XXII.

Voor de meetkundige behandeling van ellips, hyperbool en parabool wordt verwezen naar

P. WIJDENES, De kegelsneden voor het M.O. (80 ct.),
J. VERSLUYS, De meetkunde der kegelsneden (*f* 1,90),
Prof. Dr. J. G. RUTGERS, De meetkunde der kegelsneden (*f* 5,—).

Het eerste geeft voldoende voor de candidaten Wiskunde L.O., die er gaarne iets van willen weten; het tweede geeft genoeg voor de akte Wiskunde KI.

BIJ DE NEGENDE DRUK.

De nieuwe druk verschilt zo goed als niet van de vorige; het geheel is nog eens zorgvuldig nagegaan, hetgeen tot gevolg had, dat enige vereenvoudigingen en verbeteringen werden aangebracht; niet ingrijpend en van ondergeschikt belang. Weggelaten is alleen het slot van hoofdstuk XXII; de paragrafen, figuren en vraagstukken komen met dezelfde nummers voor als in de achtste druk. Het karakter van het boek is volkomen ongewijzigd gebleven; het blijft een studie- en handboek voor de Vlakke Meetkunde, tevens handleiding voor het onderwijs in dit vak.

—

De meeste veranderingen werden aangebracht teneinde duidelijk aan te geven, wat voor de akte Wiskunde L.O. gemist kan worden. De candidaten voor L.O. kunnen zonder bezwaar alle met kleine letter gedrukte theorie overslaan, alsmede de paragrafen, de voorbeelden en de vraagstukken, die van een sterretje zijn voorzien. De studerenden en de opleiders kunnen er zeker van zijn, dat hun daardoor niets wordt onthouden van wat nodig is en dat ze een afgeronde volledige leergang in de Vlakke Meetkunde doormaken.

Gaarne betuig ik weer mijn erkentelijkheid aan de Heren HARLAAR en HERREILERS voor het aandeel, dat zij in de bewerking hadden.

Amsterdam Zuid, April 1943. P. WIJDENES.
Jac. Obrechtstraat 88.

De enige verandering in de vraagstukken is deze: § 66 nr. 9 uit de 8e druk is geworden § 92 nr. 23; op de opengevallen plaats is een ander vraagstuk opgenomen. § 92 nr. 23 is geworden § 77 nr. 33.

De tweede druk van de Oplossingen past op de negende druk van het boek.

Met goedkeuring van Dr. MOLENBROEK wordt het herzieningsrecht op dit werk door ondergetekende uitgeoefend buiten enige verantwoordelijkheid van Dr. MOLENBROEK voor inhoud en vorm.

P. W.

Verklaring en afleiding van vreemde vaktermen, die in dit boek voorkomen, zoeke men op in het werkje

Vreemde woorden in de Wiskunde

door Dr. E. J. DIJKSTERHUIS.

Prijs *f* 2,00*, geb. *f* 2,50*.

De volledige oplossingen van de volgende vraagstukken uit dit boek vindt men in de jaargangen XXVI—XXX van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde.

In het boek	in jg.	nr.	In het boek	in jg.	nr.
§ 67 nr. 19	XXVI	17	§ 159 nr. 13	XXVIII	126
§ 67 nr. 21	XXVII	52	§ 159 nr. 15	XXVI	40
§ 123 nr. 27	XXIX	196	§ 166 nr. 14*a*	XXIX	3152
§ 124 nr. 34	XXVIII	174	§ 171 nr. 13	XXVIII	3104
§ 124 nr. 39	XXVIII	150	§ 177 nr. 6	XXIX	233
§ 124 nr. 47	XXVII	77	§ 196 nr. 14	XXIX	3120
§ 129 nr. 15	XXVI	29	§ 197 nr. 16	XXIX	208
§ 137 nr. 18	XXVII	3048	§ 197 nr. 24	XXX	258
§ 142 nr. 15	XXVIII	185	§ 197 nr. 53	XXIX	3144
§ 142 nr. 19	XXVI	30			

In de volgende jaargangen van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde zullen geregeld vraagstukken uit dit boek worden opgenomen.

K 1219

110. Gegeven de vierkantsvergelijking:

$(a - 1)\, x^2 - (a - 1)\, x - 2a + 1 = 0 \quad (a \text{ reëel}).$

Noem de wortels x_1 en x_2.

Voor welke waarden van a zal $x_1 > 1$ en $x_2 < -1$ zijn?

111. Toon aan, dat de wortels van $x^2 - (3a + 4)\, x + 2a^2 + 5a - 4 = 0$ reëel zijn, als a reëel is.

112. Gegeven de vierkantsvergelijking $x^2 - 4x + 7 = 0$ (wortels x_1 en x_2). Bepaal een vierkantsvergelijking, die $2x_1^2 + 3x_2^2$ en $3x_1^2 + 2x_2^2$ tot wortels heeft.

113. Bepaal a zodanig, dat de wortels van de vergelijking $x^2 - (a + 4)\, x + 5a - 6 = 0$ zich verhouden als 2 : 3.

114. Welke betrekking bestaat tussen a, b en c, als de wortels van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ zich verhouden als 1 : 2?

115. Gegeven de vergelijking $x^2 - (a + 3)\, x + (2a - 7) = 0$. Gevraagd een vergelijking samen te stellen van de 4e graad, waarvan twee wortels even groot zijn als die van de gegeven vergelijking, terwijl de beide andere wortels elk één groter zijn. Bepaal daarna voor welke waarde van a de som van de kwadraten der vier wortels minimum is.

116. Gegeven de vierkantsvergelijking $4x^2 - 2x + 1 = 0$ (wortels x_1 en x_2). Gevraagd wordt een vergelijking van de 4e graad te bepalen, die tot wortels heeft $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, x_1^3 en x_2^3.

117. Als a, b en c de zijden van een driehoek zijn, zijn de wortels van $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\, x + c^2 =$ imaginair. Bewijs dit.

118. Welke betrekking bestaat er tussen p en q, als de vergelijkingen $x^2 + px + p^2 = 0$ en $x^2 + qx + q^2 = 0$ één wortel gemeen hebben? Kunnen p en q beide reëel zijn?

119. Los x en y op uit:

$$\begin{cases} \dfrac{(5x - 3y + 1)(6x - 3y + 4)}{4x + 3y - 7} = 0 \\ 2x - y + 2 + \sqrt{2x - y + 3} = 5 \end{cases}$$

120. In welk geval is $ax^2 + bx + c \equiv px^2 + qx + r$?

Wanneer hebben beide dezelfde nulpunten?

Wanneer hebben ze één nulpunt gemeen?

121. Van het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2ax - (a + 1)\, y + a - 1 = 0 \\ (3a + 4)\, x - (3a + 1)\, y - 2a + 3 = 0 \end{cases}$$

verhouden x en y zich als 5 : 7. Bepaal a en de wortels x en y.

122. Voor welke waarden van m heeft de vergelijking:

$mx^2 - 4(m + 5)x + m + 3 = 0$ reëele wortels?

Voor welke waarden van m heeft deze vergelijking wortels, die verschillend teken hebben?

123. Los x op uit: 1e $x(a - x) = \frac{3}{16}a^2$;

2e $x^2 + (a - x)^2 = \frac{5}{8}a^2$;

3e. $\left(\frac{cx}{a}\right)^2 = x(a - x)$.

124. Los x en y op uit:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21. \end{cases}$$

Begrip gelijkwaardige stelsels!

125. Los x en y op uit:

$$\frac{2x + 3y}{9} = \frac{2x - 3y}{3} = \frac{xy - 1}{2}.$$

Licht de oplossing grafisch toe aan de hand van de beide gebruikte vergelijkingen.

IV. DE LOGICA DER RELATIES.

(Vervolg van blz. 86).

§ 16. *De logica der relaties.* Reeds in het voorgaande zal zijn gebleken hoezeer de moderne formele logica het in volledigheid en in stelselmatigheid van opbouw wint van de traditionele. Maar bij de behandeling van de logica van de proposities en van de eigenschappen konden we toch voortbouwen op een grondslag die in hoofdzaak reeds in een ver verleden door *Aristoteles*, door de Stoa, door de middeleeuwse logici was gelegd.

Van de logica der relaties kan men evenwel zeggen, dat ze een schepping van de nieuwe tijd is. Weliswaar hadden reeds de Grieken de bijzondere vorm van het relatie-oordeel opgemerkt. Maar zij schijnen de relatie nog niet als een zelfstandig element in het oordeel te hebben erkend; met het πρός τι van *Aristoteles* en het πρός τι πὼς ἔχον van de Stoïcijnen is blijkbaar veeleer het relatum, het „subjectum relationis", dan de relatie zèlf bedoeld. De bijzondere redeneervormen, die voor relatie-oordelen gelden, hebben zij nimmer tot voorwerp van onderzoek gemaakt.

Leibniz, in zovele opzichten een voorloper der moderne logica, strekt zijn onderzoekingen ook tot de relaties uit, maar de geschiedenis van de relatie-logica begint toch eerst recht met *De Morgan* (1806—1872).

Een voorbeeld van een redenering, waarin een relatie een rol speelt, is de volgende:

„het kwadraat van een even getal is een even getal
„6 is een even getal

„het kwadraat van 6 is een even getal."

Voor de redenering als zodanig is het van geen betekenis, dat de erin voorkomende termen aan de wiskunde ontleend zijn; men vergelijke de redenering:

„Een zoon van een chinees is een chinees
„Wang is een chinees

„Een zoon van Wang is een chinees."

We kunnen deze redenering als volgt analyseren:

„Voor elke y geldt: is x een zoon van y en is y een chinees, dan is x een chinees.

„Is x een zoon van Wang en is Wang een chinees, dan is x een chinees.

$$\frac{\text{„Wang is een chinees}}{\text{„Is } x \text{ een zoon van Wang, dan is } x \text{ een chinees".}}$$

We hebben hier gebruik gemaakt van de redeneervormen, die behoren bij de tautologieën $(x)\ a(x) \to a(u)$ en $((p \,\&\, q) \to r) \to (q \to (p \to r))$. In dezen redeneervormen zijn oordelen gesubstitueerd van de vormen:

„x heeft de eigenschap a"
„x staat tot y in de betrekking R."

De eerste oordeelsvorm werd in hoofdstuk III besproken; de tweede, de vorm van het *relatie-oordeel*, komt in dit hoofdstuk aan de orde. We duiden dezen oordeelsvorm aan door symbolen $R(x, y)$, $S(x, y)$, . . . en kunnen dan de vorm van onze redenering als volgt weergeven:

$$\frac{\dfrac{(y)\ (R(x, y) \,\&\, a(y)) \to a(x)}{(R(x, w) \,\&\, a(w)) \to a(x)} \qquad a(w)}{R(x, w) \to a(x)}$$

Hierbij blijkt nog eens duidelijk, dat men niet kan aanvoeren: „x staat tot y in de betrekking R" laat zich tot de vorm: „x heeft de eigenschap a" herleiden, doordat men zegt: „x heeft de eigenschap, tot y in de betrekking R te staan"; immers, de redenering in kwestie berust erop, dat de eigenschap: „tot y in de betrekking R staan" nog een vervangbaar element bevat, vertegenwoordigd door de vrije variabele y.

Nu valt aanstonds op, dat de redenering geen beroep doet op andere dan de reeds bekende deductieregels. Eerst wordt van het algemeen op een bijzonder geval overgegaan en daarna wordt een hypothetische redeneervorm toegepast. Dit geldt algemeen: in de relatie-logica kunnen we ermee volstaan de reeds bekende grondregels der deductie ook voor relaties geldig te verklaren. Het nieuwe zit dus in het toelaten van oordelen van andere vorm dan we tot nu toe beschouwd hebben; om de vorm van die oordelen te kunnen noteren voeren we propositionele variabelen $R(x, x)$, $R(x, y)$, ... $S(x, x)$, $S(x, y)$, ... in. In $R(x, x)$ komt de vrije variabele x, in $R(x, y)$ komen de vrije variabelen x en y voor.

Ik behandel alleen de identiteitsrelatie en verwijs voor een algemene theorie der relaties naar een in de „Philosophische Bibliotheek" verschijnend werk van Prof. *R. Feys*.

§ 17. *De identiteit.* We hebben in § 11 een relatie tussen praedicaten ingevoerd, die werd aangeduid door het teken „=". In deze § zullen we een nieuwe relatie definiëren, die óók door het teken „=" pleegt te worden aangeduid.

Toch is de relatie, die we nu willen bespreken, niet dezelfde als de in § 10 besprokene: laatstgenoemde relatie was er een tussen eigenschappen of predicaten, de relatie die nu aan de orde komt is een relatie tussen *wezens;* het is de *identiteit.*

De gebruikelijke definitie is geïnspireerd op *Leibniz'* „principium identitatis indiscernibilium". Twee wezens zijn identiek dan en dan alleen, wanneer ze in alle opzichten dezelfde eigenschappen bezitten (de lezer zal opmerken, dat het in dit geval minder passend is, van „twee" wezens te spreken; de formele invoering van het getalbegrip vooronderstelt de identiteit):

$$u = v \underset{Df}{=} (\varphi)\ (\varphi(u) \equiv \varphi(v)).$$

(Ik geef hier geen verdere verklaring van de betekenis van de generalisatie en van de particularisatie t.o.v. een eigenschapsvariabele; de lezer zal geen moeite hebben, de enkele beschouwingen, waarin deze begrippen optreden, te volgen).

Het begrip identiteit is verondersteld in een ander begrip, dat we dus nu kunnen definiëren:

$$[u]\ (x) \underset{Df}{=}\ x = u.$$

Het enige wezen, dat de eigenschap $[u]$ bezit, is klaarblijkelijk het wezen u zelf. We hebben hier dus langs formele weg een begrip geconstrueerd, waaronder slechts één wezen valt en dat dus niet in de traditionele zin als een „eenheid in veelheid" kan worden opgevat. Dat er zulke begrippen („Vorstellungen") zijn, heeft *Kant* opgemerkt en hij stelt ze in zijn „Logik" (§ 1) als „einzelne Vorstellungen" of „Anschauungen" t.o. de „Begriffe". In deze zin gebruikt hij de terminus „Anschauung" in de „metaphysische Erörterungen" over ruimte en tijd („Kritik der reinen Vernunft" 2. Ausg. Transz. Elementarl. 1. Teil § 2 sub 4), § 4 sub 4)).

§ 18. *De existentie.* De laatste toepassing van het identiteitsbegrip is de interpretatie van oordelen als „Plato bestaat". We interpreteren dit oordeel als synoniem met „Plato is identiek met Plato", (cf. *Hegel,* „Enzyklopädie" § 86: „Sein kann bestimmt werden, als .... *Identität* ....") en behoeven er dan geen bijzonder symbool

voor in te voeren. Het voornaamste argument ten gunste van die interpretatie is, dat de meeste redeneringen, waarin oordelen als „Plato bestaat" voorkomen, daardoor onmiddellijk een plaats vinden in het systeem der formele logica.

Als voorbeeld kies ik de analyse van *Descartes'* „cogito ergo sum" (vrij naar *Scholz*). Tegen *Descartes* werd (Resp. ad II Obj.; cf. H. J. de Vleeschauwer, „René Descartes", Antwerpen—Brussel—Nijmegen—Utrecht 1397 blz. 169) aangevoerd, dat hij een beroep zou doen op een niet gerechtvaardigde redenering en gebruik zou maken van de major: alles wat denkt, bestaat.

Volgens de moderne logica is het „cogitò ergo sum" inderdaad een enthymema (samengetrokken redenering), maar doet ze geen beroep op de major: alles wat denkt bestaat. Ze berust op de tautologie $a(u) \rightarrow u = u$ en de daaruit voortvloeiende redeneervorm:

$$\frac{\begin{array}{c} a(u) \rightarrow u = u \\ a(u) \end{array}}{u = u}$$

waarbij men voor $a(x)$ moet lezen: x denkt, voor u: ik. Acht men met *Lichtenberg* slechts de praemisse: er is iets, dat denkt, verantwoord, dan concludeert men volgens:

$$\frac{\begin{array}{c} (Ex)\ a(x) \rightarrow (Ex)\ x = x \\ (Ex)\ a(x) \end{array}}{(Ex)\ x = x.}$$

dat er iets is, dat bestaat.

In tegenstelling wellicht tot *Descartes'* eigen opvatting merk ik op, dat het geen inconsequentie betekent, wanneer *Descartes* reeds hier een beroep doet op de redenering. Immers, de cardinale vooronderstelling van de formele logica, de onderscheiding van *waar* en *onwaar*, is tevens het uitgangspunt van *Descartes'* wijsbegeerte. Door dit uitgangspunt onderscheidt zich immers de methodische van de pyrrhonische twijfel.

Uit de gegeven interpretatie vloeien nog enkele merkwaardige consequenties voort. Men heeft namelijk de tautologieën:

$$(x)\ x = x$$
$$\sim (Ex) \sim (x = x).$$

Deze zijn te interpreteren als: alle wezens bestaan; er is geen wezen, dat niet bestaat. We vinden dus één der grondstellingen van *Parmenides* terug.

Verder hebben we de tautologie:

$$(Ea)\ (a(x)) \equiv x = x.$$

Vatten we nu het denken op als eén toekennen van praedicaten, dan is deze tautologie zó te interpreteren: het is hetzelfde of iets gedacht wordt, of dat het bestaat. Dit is de tweede grondstelling van *Parmenides*!

De tautologie: $a(u) \rightarrow u = u$ tenslotte rechtvaardigt de opvatting, die *Kant* (Kr. d. r. V. 1. Ausg. S. 600) aldus formuleert: „Wenn ich . . . . ein Ding, durch welche und wie viel Prädikate ich will . . . ., denke, so kommt dadurch, dass ich noch hinzusetze, dieses Ding ist, nicht das Mindeste zu dem Dinge hinzu.” Kent men immers aan een ding een praedicaat toe, dan kent men er daardoor tevens existentie aan toe.

Ik beschouw verder de tautologiën

$$(u = u) \equiv (a)\ (a(u)\ V\ \bar{a}(u)).$$

(„Bestaat u, dan geldt voor elke eigenschap a, dat ze zelf of dat haar ontkenning $\bar{a}$ aan u toekomt; en omgekeerd.”)

$$(u = u) \equiv \sim (Ea)\ (a(u)\ \&\ \bar{a}(u)).$$

(„Bestaat u, dan is er geen eigenschap a, die tegelijk met haar ontkenning a aan u toekomt; en omgekeerd.”)

We kunnen deze stellingen opvatten als aequivalenten van de ontologische vorm van het principium tertii exclusi en van het principium contradictionis, die *Aristoteles* in zijn Metaphysica formuleert.

Tegen een dergelijke interpretatie kan men inbrengen, dat op grond ervan deze en andere, op analoge wijze te verkrijgen, principes „slechts tautologieën” zouden zijn.

Ik wil om te beginnen opmerken, dat ik de terminus „tautologie” niet heb gebruikt, omdat ik hem zo bijzonder juist gekozen vind, maar omdat hij tamelijk wel is ingeburgerd. In de zin van het hier besproken logisch systeem is een oordeelsvorm dan en dan alleen eén tautologie, wanneer ze bij *elke* zinvolle substitutie voor de erin voorkomende variabelen overgaat in een waar oordeel.

Verder geloof ik niet, dat het juist zou zijn, te zeggen, dat de ware oordelen, die men zó verkrijgt, ons niets zouden leren, omdat ze op àl het zijnde, zonder onderscheid, van toepassing zijn. Immers, de bedoelde ware oordelen, dus ook de tautologieën, vloeien voort uit bepaalde onderstellingen, die aan al ons redeneren ten grondslag liggen. De tautologieën van de formele logica ontwikkelen dus die

eigenschappen van al het bestaande, die liggen opgesloten in de vooronderstellingen, welke ons redeneren mogelijk maken, in het bijzonder in het waarheidsbegrip.

V. HISTORISCHE AANTEKENINGEN.

De implicatie, de conjunctie en de disjunctie zijn door *Petrus Hispanus* (1226—1277) in zijn „Summulae Logicales" (door *Prantl* ten onrechte aangezien voor een vertaling van de *Σύνοψις* van *Psellus*) op de volgende wijze als extensionele oordeelsverbindingen gekarakteriseerd:

„Ad veritatem *conditionalis* requiritur, quod antecedens non potest esse verum sine consequente . . . ; ad falsitatem conditionalis sufficit, quod antecedens potest esse verum sine consequente . . . Ad veritatem *copulativae* requiritur, utramque partem esse veram . . .; ad falsitatem eius sufficit, alteram partem esse falsam . . . Ad veritatem *disiunctivae* requiritur, unam partem esse veram . . .; ad falsitatem eius requiritur, utramque partem esse falsam."

De omschrijving van de disjunctie is hier nieuw, die van de overige gaat tot de stoïcijnen terug.

De omschrijving van de implicatie wordt aan den stoïcijn *Philo* toegeschreven, maar lijkt op zijn minst voorbereid door *Diodorus Cronus*:

Διόδωρος δὲ ἀληθὲς εἶναί φησι συνημμένον, ὅπερ μήτε ἐνεδέχετο μήτε ἐνδέχεται ἀρχόμενον ἀπ᾽ ἀληθοῦς λήγειν ἐπὶ ψεῦδος (Sext. Math. VIII 115).

De formulering van de hypothetische syllogismen van *Theophrastus* is volgens *Alexander van Aphrodisias* (ad Anal. pri. f. 134):

εἰ τὸ Α, τὸ Β· εἰ τὸ Β, τὸ Γ· εἰ ἄρα τὸ Α, τὸ Γ.

εἰ τὸ Α, τὸ Β· εἰ μὴ τὸ Α, τὸ Γ· εἰ ἄρα μὴ τὸ Β, τὸ Γ.

εἰ τὸ Α, το Γ· ἐι τὸ Β, οὐ τὸ Γ· εἰ ἄρα τὸ Α, οὐ τὸ Β.

Na *Theophrastus* en *Eudemus* zetten de stoïcijnen de ontwikkeling van de logica en i.h.b. van de propositie-logica voort. Vooral *Chrysippus* moet hier worden genoemd. Van zijn vijf *συλλογισμοὶ ἀναπόδεικτοι* werden in §§ 4 en 6 alleen de eerste drie en de vijfde genoemd. De vierde

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ p \end{array}}{\sim q}$$

is namelijk niet in overeenstemming met onze definitie van de disjunctie.

Als voorbeeld van de uitdrukkingswijze der stoïsche logici noem ik hun formulering van de redeneervorm (cf. § 7, I):

$$\frac{\sim p \rightarrow p}{p}$$

Zij luidt: *εἰ οὐ τὸ πρῶτον, τὸ πρῶτον · τὸ πρῶτον ἄρα* (*Sextus,* Math. VIII 292). De overgang van het gebruik van letters *A, B, Γ,...* naar telwoorden *τὸ πρῶτον,...* als aanduiding van de propositionele variabelen wordt begrijpelijk, als men bedenkt, dat de letters van het alphabet bij de Grieken tevens als cijfers dienst deden.

Bij *Boëthius* (ca. 480—525: „De syllogismo hypothetico") en bij *Abaelardus* (1033—1109: „Dialectica") vinden wij een uitvoerige behandeling van de propositie-logica, die zich op bepaalde punten van de moderne onderscheidt; een belangrijk verschilpunt is het ontbreken van een scherpe omschrijving van de disjunctie.

Zulk een omschrijving is, zoals we zagen, het eerst door *Petrus Hispanus* gegeven; daardoor werd het hem mogelijk, de tautologieën

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \,\&\, \sim q$$
$$\sim (p \,\&\, q) \equiv \sim p \vee \sim q,$$

die *De Morgan* in de vorige eeuw terugvond, als volgt samenvattend te formuleren:

„Copulativa et disiunctiva de partibus contradicentibus contradicunt."

De ontwikkelingslijn *Theophrastus — Chrysippus — Boëthius — Abaelardus — Petrus Hispanus* breekt af met *A. Geulincx*' „Methodus inveniendi argumenta" (1663), waar ook de tautologieën van *De Morgan* weer voorkomen; dit werk is merkwaardig door de axiomatische opbouw.

Onmiddellijk begint dan met *Leibniz* (1666) een tweede ontwikkelingsreeks. Deze is inzoverre minder „modern", dat, evenals reeds bij *Aristoteles,* alle aandacht valt op de logica der eigenschappen; de logica der proposities blijft voorlopig buiten beschouwing. Modern is de invoering van een symbolensysteem, dat zich meer en meer ontwikkelt.

Over *Leibniz*' betekenis vooral: Alg. Ned. Tijdschr. v. Wijsb. en Psych. Jaarg. 34 (1940/41). Hier wil ik er op wijzen, dat de ge-

dachte van een op begripsanalyse berustende uitdrukkingswijze is aan te treffen bij *Descartes* (brief aan *Mersenne* van 20 November 1629. *Clerselier* I no. III), de opvatting van het redeneren als een soort rekenen bij *Hobbes* (Leviathan I, 5). Bij *Hobbes* (die te Oxford kennis maakte met de opvattingen van nominalisten als *Occam*) vindt men ook (l.c. I, 4, 5) de thans als conventionalisme aangeduide opvatting van de logica duidelijk geformuleerd.

Van *Leibniz'* wijze van formuleren enkele voorbeelden; ten eerste het bewijs van het „praeclarum theorema":

$$((a \subset b) \,\&\, (d \subset c)) \rightarrow ad \subset bc.$$

„Si *a* est *b*, et *d* est *c*, tunc *ad* erit *bc*. Hoc est praeclarum theorema, quod demonstrâtur hoc modo:

a est *b*, ergo *ad* est *bd* per priora,

d est *c*, ergo *bd* est *bc* rursus per priora,

ad est *bd*, et *bd* est *bc*, ergo *ad* est *bc*. Quod erat demonstrandum."

De tautologie $(a \subset b) \equiv (a = ab)$ luidt bij *Leibniz:*

„Omne *A* est *B* id est *AB* ∞ *A*."

De tautologieën:

$$(b \subset a) \rightarrow (a + b = a)$$
$$(a + b = a) \rightarrow (b \subset a)$$

luiden bij *Leibniz*:

„Si *B* est in *A*, erit $A + B \infty A$... Si $A + B \infty A$, tunc *B* erit in *A*."

De definitie van de identiteit luidt bij *Leibniz*: „Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate."

(„Philosophische Schriften" Bd VII, Ss. 223, 214, 232, 219).

In deze richting beweegt zich de ontwikkeling van de moderne logica ook nog bij *Lambert* (1728—1777) en zelfs bij *Boole* (1815—1864).

De logica der relaties treedt het eerst op bij *De Morgan* (1806—1872). Bij hem vinden we de negatie en de omkering van een relatie en de beschouwing van reflexieve, symmetrische en transitieve relaties.

De logica van de proposities wordt het eerst door *Mac Coll* als grondslag van het systeem der logica erkend.

Wij hebben de vorm van het oordeel „Socrates is sterfelijk" genoteerd als „$a(x)$", waarbij de copula „is" dus niet door een bepaald symbool wordt vertegenwoordigd; daarmee is een voorstel

van *Lycophron* (*Diels,* „Vorsokratiker", 83 [0] fr. 2, naar *Aristoteles,* Phys. A 2, 185 b 25) ten uitvoer gelegd; reeds *Lycophron* zag blijkbaar in, dat de door *Gorgias* en later door *Antisthenes, Stilpo* en *Lotze* tegen oordelen, waarvan subject en praedicaat niet identiek zijn, aangevoerde bezwaren (die voortvloeien uit de dubbelzinnigheid van het verbum „zijn") op deze wijze automatisch worden ondervangen.

Voor nadere bijzonderheden worde verwezen naar:

K. Dürr, „Aussagenlogik im Mittelalter", Erkenntnis Bd 7 (1938) Ss. 160—168.

„Die mathematische Logik des Arnold Geulincx", The Journal of Unified Science (Erkenntnis) Vol. VIII (1940) pp. 361—368.

C. I. Lewis, „A Survey of Symbolic Logic", Berkeley 1918 (voor de ontwikkeling van Leibniz tot op heden).

J. Lukasiewicz, „Zur Geschichte der Aussagenlogik", Erkenntnis Bd 5 (1935) Ss. 111—131.

H. Scholz, „Geschichte der Logik", Berlin 1931.

F. Solmsen, „Die Entwicklung der Aristotelischen Logik und Rhetorik" (Neue Philol. Unters. 4. Heft), Berlin 1929.

Onmisbaar is nog altijd, ondanks de vaak averechtse beoordeling van de besproken opvattingen: *K. Prantl* „Geschichte der Logik im Abendlande", Leipzig 1855—1870.

Historische bijzonderheden vindt men verder in: *Ueberweg,* „System der Logik".

VI. DE KATEGORIEEN.

Het is mogelijk, zoals ik in het volgende wil laten zien, het begrip *kategorie,* dat in verschillende wijsgeerige systemen (o.a. bij *Aristoteles* en *Kant*) zulk een belangrijke plaats inneemt, en dat tot zoveel verschil van mening aanleiding heeft gegeven, in de termen der moderne formele logica te omschrijven; daarbij kunnen dan verschillende gerezen geschillen uit de weg worden geruimd.

Om met *Aristoteles* te beginnen, zijn theorie der kategorieën of praedicamenten kan alleen worden begrepen in verband met de complementaire theorie der kategoremen of praedicabilia; zie *I. v. d. Berg,* „Categorie en Categoreem als grondbegrippen der logica", Vraagstukken uit de Logica, Nijmegen 1938 (Suppl. op Studia Catholica).

Beide theorieën (zie *Aristoteles'* „Kategorieën" en zijn „Topica", boek I) leveren een classificatie van oordeelsbestanddelen, maar van een verschillend gezichtspunt. De theorie der kategoremen classificeert de oordeelsbestanddelen naar hun onderlinge relaties („Topica". I, 8) en wel als genus, species, differentia, proprium, accidens. De theorie der kategorieën evenwel beschouwt de oordeelsbestanddelen los van hun onderlinge betrekkingen en ook los van hun betrekking tot het oordeel (*τὰ κατὰ μηδεμίαν συμπλοκὴν λενομένα*, „Kategorieën", 4). Volledigheidshalve vermeld ik nog, dat de oordeelsbestanddelen naar hun betrekking tot het oordeel worden onderscheiden in subject en praedicaat („Analytica priora", I, 1). Ik zal alleen op de theorie der kategorieën iets nader ingaan.

Het is duidelijk, dat de classificaties in kwestie alleen de vervangbare of *materiële* oordeelsbestanddelen betreffen. Beaming en ontkenning, algemeen, bijzonder, zelfs de modale onderscheidingen, vinden in *Aristoteles'* lijst van kategorieën geen plaats. Dit is niet moeilijk te verklaren: de niet-vervangbare of formele oordeelsbestanddelen hebben niet, als de materiële, een substantiëel correlaat en de leer der kategorieën was niet slechts bedoeld als een logische classificatie der oordeelsbestanddelen, maar in laatste instantie als een ontologische classificatie der substanties („Kategorieën", 5).

Het is bekend, dat de stoïcijnen het aantal kategorieën tot vier terugbrachten en dat ze van dit viertal een deductie beproefden, overeenkomstig de deductie, door *Aristoteles* voor zijn lijst van kategoremen gegeven („Topica", I, 8). *Aristoteles* zelf geeft bij gelegenheid („Metaphysica", XII, 2) een nog beperkter aantal kategorieën: substantie, hoedanigheid, relatie. Merkwaardigerwijs is dit het drietal, dat ook de moderne logica oplevert, en waarvan de overige kategorieën van *Aristoteles* slechts specificaties of combinaties zijn.

In tegenstelling tot *Aristoteles* beperkt *Kant* zich tot het beschouwen van de formele oordeelsbestanddelen, of, zoals hij zich minder juist uitdrukt, van de oordeelsvormen. Minder juist: want deze wijze van spreken wekt (ten onrechte en ook onbedoeld) de indruk, dat er precies twaalf oordeelsvormen zijn, tot één en slechts één waarvan elk oordeel zou moeten behoren; het oordeel: *alle mensen zijn arm of sommige mensen zijn niet arm,* evenwel, is tegelijk algemeen, bijzonder, bevestigend, ontkennend en disjunctief! Daarom is het meer passend te spreken van formele oordeelsbestanddelen; dit

betekent niet, dat een oordeel slechts een juxtapositie van elementen zou zijn.

Kant's terminologie kan nog tot een ander misverstand aanleiding geven: bij oppervlakkige beschouwing kan het lijken, alsof het meerendeel van *Kant's* „oordeelsvormen" overeenkomt met aristotelische kategorieën: de kategorieën der kwaliteit met het ποιόν, die der kwantiteit met het ποσόν, die der relatie met het πρός τι. Een vergelijking van de door *Aristoteles* („Kategorieën", 4) gegeven voorbeelden met *Kant's* omschrijving toont echter onmiddellijk het tegendeel.

In *Kant's* lijst vereist de moderne logica (n'en déplaise *K. Reich*, „Die Vollständigkeit der kantischen Urteilstafel", Berlin 1932) enige wijzigingen. De oneindige oordelen behoeven geen bijzondere vermelding, de copulatieve oordelen daarentegen wel; ten aanzien van de modaliteitskategorieën bestaat er geen communis opinio; beaming en assertie worden gewoonlijk niet meer als bijzondere oordeelsbestanddelen beschouwd. Zo komen we tot de volgende *lijst van kategorieën:*

1. *Formele oordeelsbestanddelen:*

a) R e l a t i e: inhaerentie;
b) K w a l i t e i t: ontkenning, disjunctie, copulatie, implicatie;
c) K w a n t i t e i t: generalisatie en particularisatie;
d) M o d a l i t e i t: noodzakelijkheid, mogelijkheid, onmogelijkheid, toevalligheid.

2. *Materiële oordeelsbestanddelen:*

a. S u b s t a n t i e s;
b) P r a e d i c a t e n: eigenschappen en relaties.

Het resultaat van een confrontatie van de theorie der kategorieën met de moderne formele logica is dus geenszins negatief. De nodige wijzigingen raken niet het beginsel van de overgeleverde theorieën; de theorieën van *Aristoteles* en van *Kant* zijn niet, zoals men veelal meent, met elkaar in tegenspraak, maar ze vullen elkaar aan.

Er is een klein verschil tussen de moderne opvatting van de materiële oordeelsbestanddelen en die van *Aristoteles*. *Aristoteles'* πρός τι valt niet samen met de relatie in onze zin, maar met het

relatum, het subjectum relationis, met den drager van de relatie. Deze opmerking maakt ook *Nicolai Hartmann* („Der Aufbau der realen Welt", Berl. 1940, S. 227): „Das hat nicht hindern können, dass aus diesem unscheinbaren „Bezogensein" sich geschichtlich das Prinzip der Relation herausgebildet hat". Dit geldt ook voor de overige kategorieën; het *ποιόν* is nog niet de kwaliteit, doch nog slechts het „quale". In deze zin moet *Aristoteles* opmerking aan het slot van „Kategorieën" 8 worden opgevat, volgens welke hetzelfde tegelijk een *ποιὸν* en een *πρός τι* kan zijn.

AANTEKENINGEN.

Bij § 1. Bij de behandeling van het begrip „oordeelsvorm" hebben we gebruik gemaakt van een enigszins primitieve wijze van abstraheren: de vorm van het oordeel was datgene wat men overhoudt, als men de inhoud wegneemt, of van die inhoud afziet.

De vorm van abstractie, die men in verschillende wiskundige begripsvormingen toepast, stelt ons echter in staat, de gedachtengang te preciseren. Ik geef eerst een aan de wiskunde ontleend voorbeeld, en wel de invoering van het begrip „getalklassen modulo 5" (zie *Wijdenes,* „Beginselen van de Getallenleer", blzz. 24 en 25). Men begint vast te stellen, dat twee getallen *congruent modulo* 5 zullen heten, wanneer hun verschil deelbaar is door 5. Daarna definieert men de *getalklassen modulo* 5 als klassen, die bestaan uit onderling congruente getallen, in dier voege, dat twee onderling congruente getallen steeds tot dezelfde getalklasse, twee onderling niet congruente steeds tot verschillende getalklassen behoren. Tenslotte merk ik op, dat de getallen, die tot een zelfde getalklasse behoren, gekarakteriseerd zijn door een gemeenschappelijke eigenschap, de eigenschap nl., bij deling door 5 een bepaalde rest op te leveren.

Om nu tot het begrip „vorm" met betrekking tot oordelen te komen, merk ik op, dat we, ook zonder dit begrip te bezitten, kunnen beoordelen, of twee oordelen dezelfde vorm hebben, of niet. We hebben in § 1 voorbeelden gezien; we behoefden daartoe slechts te letten op de vervangbare elementen in die oordelen, en op de redeneringen, waarin die oordelen voorkomen; of een oordeel ook niet-vervangbare elementen bevat, doet niet ter zake. Zo krijgen we een relatie „gelijk-in-vorm" tussen oordelen, die vergelijkbaar is met de relatie „congruent modulo 5" tussen getallen. We definiëren nu oordeelsklassen, in dier voege, dat twee oordelen dan en dan alleen tot eenzelfde oordeelsklasse behoren, wanneer ze onderling gelijk-in-vorm zijn. Alle oordelen, die tot één oordeelsklasse behoren, hebben een gemeenschappelijke, voor die klasse karakteristieke eigenschap; die eigenschap noemt men de *vorm* van die oordelen.

Door deze herziening van de in § 1 ontwikkelde theorie van het oordeel is de door *Brunstäd* („Logik", S. 82/83) op de moderne formele logica uitgeoefende kritiek uitgeschakeld. „Die Beurteilung insgesamt muss auf den falschen Formbegriff zurückgehen, der zugrunde liegt . . . . Der Formgedanke ist von der Art entnommen, wie die Dinge, die Elemente in Raum enthalten sind . . . . Die Kombination ist immer nur blosses Beieinander, Nebeneinander . . . ."

Inderdaad kan de behandeling van § 1 de indruk hebben gewekt, dat het oordeel door samenvoeging van zijn vorm en zijn inhoud zou ontstaan, zodat men achteraf de vorm zou kunnen verkrijgen, door het oordeel van zijn inhoud te ontdoen. Hiertegenover kan men de opvatting verdedigen, dat men, wanneer men het oordeel van zijn

inhoud ontdoet, niet de vorm van het oordeel, maar helemaal niets overhoudt.

Dit dilemma ontgaan we door de nu aangebrachte precisering. Immers, de vorm is niet langer een *bestanddeel* van het oordeel, het is een *eigenschap,* die het deelt met alle oordelen, die met het eerste gelijk-in-vorm zijn.

Bij § 8. Exact kan men de betekenis van de termen „vrije variabele" en „oordeelsvorm" (in de zin van de logica der eigenschappen) vastleggen in de vorm van onderstaande simultane recurrente definitie:

1) $p; q, r, \ldots e(x), a(y), \ldots b(x), b(y), \ldots$ zijn oordeelsvormen.

2) $p, q, r, \ldots$ bevatten geen vrije variabele.
$a(x), b(x), c(x), \ldots$ bevatten alléén de vrije variabele x.
$a(y), b(y), c(y), \ldots$ bevatten alléén de vrije variabele y.
. . . .

3) Bevat $P(x)$ de vrije variabele x, dan bevatten $(x)P(x)$ en $(Ex)P(x)$ de vrije variabele x niet.

4) Bevat $P(x)$ de vrije variabele x, dan bevatten ook $\sim P(x)$, $P(x) V Q$, $Q V P(x)$, $P(x)$, $P(x) \& Q$, $Q \& P(x)$, $P(x) \rightarrow Q$, $Q \rightarrow P(x)$ de vrije variabele x.

5) Bevat $P(x, y)$ de vrije variabelen x en y, dan bevatten $(x)P(x, y)$ en $(Ex)P(x, y)$ de vrije variabele y.

6) Is P een oordeelsvorm, dan ook $\sim P$. Zij P en Q oordeelsvormen, dan ook PVQ, $P \& Q$, $P \rightarrow Q$.

7 Is $P(x)$ een oordeelsvorm, die de vrije variabele x bevat, dan zijn ook $(x)P(x)$ en $(Ex)P(x)$ oordeelsvormen.

8) Niets heet (in dit hoofdstuk) een oordeelsvorm tenzij op grond van deze definitie.

De definities 6 en 7 moeten als volgt worden verscherpt:

Definitie 6. Bevat de oordeelsvorm $P(x)$ als enige vrije variabele de variabele x en vervangt men alle eigenschapsvariabelen, die in P voorkomen, door bepaalde eigenschappen, dan is $(x)P(x)$ dan en dan alleen *waar,* wanneer $P(x)$ bij elke zinvolle substitutie van een wezen voor de variabele x overgaat in een waar oordeel, anders *onwaar.*

Definitie 7. Bevat de oordeelsvorm $P(x)$ als enige vrije variabele de variabele x en vervangt men alle eigenschapsvariabelen, die in P voorkomen, door bepaalde eigenschappen, dan is $(Ex)P(x)$ dan en dan alleen *waar,* als, bij minstens één zinvolle substitutie van een wezen voor de variabele x, $P(x)$ overgaat in een waar oordeel; anders onwaar.

EUCLIDISCHE KAARTEN VAN NIET-EUCLIDISCHE OPPERVLAKKEN

DOOR

J. A. BARRAU.

Dit artikel geeft ongeveer den inhoud weer van de voordracht, den 29 Dec. 1942 te Utrecht gehouden in de Algemene Vergadering van „Wimecos".

§ 1. In de Euclidische meetkunde is de *omwentelings-cilinder* het eenvoudigste voorbeeld van de klasse der *ontwikkelbare oppervlakken,* dat zijn zulke oppervlakken, welke *lengte-trouw* (dat is dan tevens hoek-getrouw en oppervlakte-trouw) kunnen worden afgebeeld op het platte vlak; de klasse omvat de tangenten-oppervlakken van ruimtekrommen, de kegels en de cilinders.

De kaart is eene strook, begrensd door twee parallelle rechten, ter breedte $2\pi r$, als r de straal van den cilinder is; laat men den linkerrand der strook tot de kaart behooren, dan behoort de rechterrand (indien men ten minste de kaart eenduidig wil houden) er niet meer toe, hij behoort tot eene herhaling ervan: de kaart is *periodiek.*

Hellende rechte lijnen in de kaart, die den rechterrand bereiken, worden uit een punt op gelijke hoogte van den linkerrand in dezelfde richting voortgezet, en dat telkens opnieuw; evenzoo wordt het snijpunt met den linkerrand steeds opnieuw naar den rechterrand overgebracht; zulke lijnen stellen de transcendente geodetische krommen van den cilinder voor, dat zijn de schroeflijnen. *Algebraïsche* geodeten zijn alleen de beschrijvende lijnen van den cilinder en de parallelcirkels, in de kaart de verticale en de horizontale rechten.

Horizontale lijnen op onderlingen afstand $2\pi r$ verdeelen de kaart-strook in oneindig vele onderling gelijke vierkanten, die door lijnen evenwijdig aan de zijden in steeds kleinere onderling gelijke vierkanten kunnen worden onderverdeeld. Met deze quadrilleering correspondeert eene soortgelijke quadrilleering op den cilinder, en

het is de mogelijkheid van zulk eene onbeperkt verfijnbare quadrilleering op een oppervlak, welke de lengte-trouwe afbeeldbaarheid op het platte vlak verzekert: het boogelement is dan $ds^2 = dx^2 + dy^2$, evenals in het vlak.

§ 2. Zulk eene quadrilleering door meridianen en parallellen is evenzeer mogelijk op den *omwentelings-cilinder* in de *hyperbolische meetkunde,* als wij daaronder verstaan de meetkundige plaats der punten, welke een vasten, hyperbolisch gemeten, afstand ϱ tot eene vaste as hebben. Zulk een „cilinder" is nu géén „kegel met oneindig verren top", of top op Ω, voor welke figuur men de benaming „grenskegel" of „parallelkegel" zou kunnen gebruiken.

Kiest men als absoluut oppervlak Ω den eenheidsbol

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

en als omwentelings-as de Z-as, dan is de vergelijking van den omw.cilinder

$$x^2 + y^2 + \lambda^2 (z^2 - 1) = 0,$$

waarin $\lambda^2 < 1$, om binnen Ω te blijven.

De doorsneden toch met parallelvlakken zijn, ook hyperbolisch gezien, „cirkels", daar ze de Ω-doorsnede dubbel raken, de doorsneden met meridiaanvlakken echter zijn „afstandskrommen" tot de Z-as, die Ω in de reëele snijpunten met die as dubbel raken.

Evenals in het geval van den Euclidischen cilinder kan men nu een stelsel parallelvlakken aanbrengen, dat elke meridiaankromme verdeelt in bogen van eene hyperbolische lengte β, gelijk aan den omtrek van een parallelcirkel; de ringen, waarin het oppervlak aldus wordt verdeeld kunnen worden afgebeeld op de vierkanten van volle breedte eener parallelle strook en zoowel die ringen, als de vierkanten der kaart kunnen onbeperkt verfijnbaar worden onderverdeeld, de eerste door meridianen en parallellen, de tweede door lijnen evenwijdig aan de zijden. Aldus ontstaat eene Euclidische kaart van het niet-Euclidische oppervlak; de lengte-trouw beteekent nu, dat de hyperbolisch gemeten lengte van een boog op den cilinder gelijk is aan de Euclidisch gemeten lengte van den correspondeerenden boog in de kaart. De kaart is, evenals in het Euclidische geval, *periodiek;* hellende rechten in de kaart stellen transcendente geodetische krommen (voor hyperbolische maat) op

den cilinder voor, dat zijn „schroeflijnen", de eenige algebraïsche geodeten zijn weder de meridianen en de parallellen.

De hyperbolische hoogte α der ringen, gemeten op de Z-as, kan als volgt worden berekend.

Vooreerst is

$$\beta = 2\pi \operatorname{Sh} \varrho,$$

immers in de elliptische meetkunde is

$$\beta = 2\pi \sin \varrho.$$

Maar ook is

$$\beta = \alpha \operatorname{Ch} \varrho,$$

immers in de elliptische meetkunde is

$$\beta = \alpha \cos \varrho.$$

Dus is

$$\alpha \operatorname{Ch} \varrho = 2\pi \operatorname{Sh} \varrho$$

en

$$\alpha = 2\pi \operatorname{th} \varrho.$$

Hierbij is gebruik gemaakt van den regel, dat de formules der hyperbolische driehoeksmeting worden verkregen uit die der elliptische (dat is die der boldriehoeksmeting) door *cos, sin* en *tg* van de zijden resp. te vervangen door *Ch,* $\frac{1}{i}$ *Sh* en $\frac{1}{i}$ *th.* Deze regel volgt uit de Cayley-sche definitie van de lengte van een segment, welke in de elliptische meetkunde luidt

$$\alpha = \frac{1}{2i} \lg \mathrm{D},$$

analoog aan de formule van *Laguerre,* in de hyperbolische meetkunde echter

$$a = \tfrac{1}{2} \lg \mathrm{D},$$

hierin is D de dubbelverhouding van de eindpunten van het segment met de punten waar zijn drager Ω snijdt; deze punten zijn in het eerste geval imaginair, in het tweede reëel.

Dus is vooreerst

$$i\alpha = a, \quad \alpha = \frac{a}{i}.$$

Verder is

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} = \frac{e^{a}+e^{-a}}{2} = \text{Ch}\, a,$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} = \frac{e^{a}-e^{-a}}{2i} = \frac{1}{i}\,\text{Sh}\, a,$$

waaruit

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{i}\,\text{th}\, a.$$

Nu is inderdaad op den bol de omtrek van een parallelcirkel met poolsafstand ϱ gelijk aan $2\pi \sin \varrho$; de verhouding van den parallelcirkel op breedte ϱ tot den equator, dus ook die van correspondeerende bogen β en α, is $\cos \varrho$ en zulk een parallelcirkel is de afstandskromme voor afstand ϱ tot den equator.

§ 3. Voor de *elliptische meetkunde* kan men als absoluut oppervlak nemen den imaginairen bol met straal i om O, die tot vergelijking heeft

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0,$$

de *omwentelings-cilinders* om de Z-as hebben nu de vergelijking

$$x^2 + y^2 - \lambda^2 (z^2 + 1) = 0 \qquad , \lambda^2 > 0,$$

zij zijn, Euclidisch gezien, eenbladige omw. hyperboloïden, waarop dus twee stelsels reëele beschrijvende lijnen liggen, deze rechten zijn de naar *Clifford* genoemde *kruisende parallellen* van OZ.

Twee lijnen van verschillend stelsel op eenzelfde oppervlak, bijv. dat met elliptisch gemeten straal ϱ, snijden elkander onder een hoek die, elliptsch gemeten, voor elk tweetal lijnen dezelfde is, namelijk 2ϱ; geschiedt de snijding op den Euclidischen keelcirkel, dan is die hoek gelijk aan den Euclidischen hoek van snijding.

Voor $\lambda^2 = 1$, dus op het oppervlak

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0,$$

is die hoek recht, het is de *rechthoekige omw.cilinder* met straal $\varrho = \frac{\pi}{4}$.

Snijdt men het oppervlak, waarvan de elliptisch gemeten oppervlakte eindig is, langs twee beschrijvenden van verschillend stelsel open, dan kan het worden beschouwd als één „vierkant" met zijden $\frac{\pi}{2}$ (de eindige totale lengte der rechte lijn in de elliptische meet-

kunde), de vier hoekpunten van het vierkant komen in het eene snijpunt samen. Dit vierkant kan onbeperkt worden onderverdeeld, bijv. door den Euclidischen keelcirkel in gelijke deelen te verdeelen en in elk dezer deelpunten de beschrijvende lijnen te trekken.

Van het oppervlak kan dus eene lengte-trouwe Euclidische kaart worden gemaakt, welke bestaat uit een vierkant, waarvan één hoekpunt (bijv. dat links onder) en de beide daarin samenkomende zijden tot de kaart behooren; de kaart is *dubbel-periodiek* (periodiek in de hoogte, zoowel als in de breedte).

Bij den *scheefhoekigen omw.cilinder* wordt de kaart ruitvormig in plaats van vierkant — wij bespreken verder alleen den rechthoekigen cilinder.

Rechten in de kaart geven weder geodetische krommen (voor elliptische maat) op het oppervlak, zij zijn transcendent, als hunne richtingsconstante m irrationaal is. Is m echter rationaal,

$$m = \frac{p}{q} \text{ of } m = -\frac{p}{q},$$

p en q onderling ondeelbaar, dan wordt de geodeet *algebraïsch,* en wel eene $\{p\ ;\ q\}$-kromme, d.w.z. de beschrijvenden van het eene stelsel worden in p, die van het andere in q punten gesneden. Voor zulke krommen bestaat nu de eigenschap, dat het aantal snijpunten eener $\{p_1\ ;\ q_1\}$ met eene $\{p_2\ ;\ q_2\}$ bedraagt

$$s = p_1 q_2 + p_2 q_1.$$

Kiest men

$$m_1 = +\frac{p_1}{q_1}, \text{ doch } m_2 = -\frac{p_2}{q_2},$$

dan zijn *al deze snijpunten reëel,* zooals fig. 1 vertoont voor het geval $m_1 = +\,^1/_2$, $m_2 = -\,^2/_3$, $s = 7$; daar het punt A als snijpunt gemerkt is, mogen de drie andere hoekpunten van het kaartvierkant niet meer medetellen, zij stellen hetzelfde snijpunt voor als A.

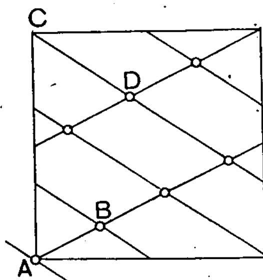


Fig. 1.

Voor het bewijs berekenen wij het aantal parallelegrammen, waarin de stelsels van evenwijdige lijnen, die in de kaart de geodetische $\{p_1\ ;\ q_1\}$ en $\{p_2\ ;\ q_2\}$-krommen voorstellen, het kaartvierkant met zijde 1 verdeelen.

Het punt B (fig. 1) is het snijpunt van de lijnen

$$y = \frac{p_1}{q_1}x \text{ en } p_2x + q_2y = 1,$$

dus

$$x = \frac{q_1}{p_1q_2 + p_2q_1}, \quad y = \frac{p_1}{p_1q_2 + p_2q_1}$$

en

$$AB^2 = \frac{p_1^2 + q_1^2}{(p_1q_2 + p_2q_1)^2}.$$

Evenzoo (door letterverwisseling)

$$CD^2 = \frac{p_2^2 + q_2^2}{(p_1q_2 + p_2q_1)^2},$$

AB en CD zijn de lengten der zijden van elk parallelegram. Voor den ingesloten hoek φ is

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}}{1 - \frac{p_1p_2}{q_1q_2}} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2 - p_1p_2},$$

dus

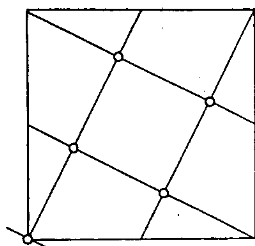
$$\sin^2\varphi = \frac{(p_1q_2 + p_2q_1)^2}{(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2)}$$

en

$$O^2 = AB^2 \,.\, CD^2 \,.\, \sin^2\varphi = \frac{1}{(p_1q_2 + p_2q_1)^2},$$

$$O = \frac{1}{p_1q_2 + p_2q_1}.$$

Het kaartvierkant bevat dus $(p_1q_2 + p_2q_1)$ parallelegrammen; daar elk hiervan vier hoekpunten heeft, doch elk hiervan ook tot vier parallelegrammen behoort, is ook het aantal snijpunten der krommen gelijk aan $p_1q_2 + q_2p_1$.


Fig. 2.

Neemt men

$$m_1 = \frac{p}{q}, \quad m_2 = -\frac{q}{p},$$

dan worden de parallelegrammen tot vierkanten, de *twee* geodetische krommen op het oppervlak verdeelen dit dan in $p^2 + q^2$ gelijke vierkanten; fig. 2 vertoont dit voor eene $\{1 \; ; \; 2\}$ en eene $\{2 \; ; \; 1\}$-kromme, $s = 5$, elk der vijf vierkanten heeft met elk der vier andere eene zijde gemeen.

Zijn p en q oneven, dus $p^2 + q^2$ even, dan kunnen de vierkanten om den anderen in twee kleuren worden gekleurd, zooals fig. 3 vertoont voor $m = \frac{3}{1}$, het oppervlak (waarvan de oppervlakte immers eindig is) is belegd met $\frac{p^2 + q^2}{2}$ zwarte en $\frac{p^2 + q^2}{2}$ witte tegels, in de figuur vijf en vijf. Het eenvoudigste voorbeeld hiervan is $m = \frac{1}{1}$ (fig. 4), het oppervlak is nu verdeeld in *twee* vierkanten ABCD en DCEF, hierbij treedt ABC in de plaats van GDF, CEF in de plaats van ADG. Inderdaad, snijdt men den rechthoekigen omw. cilinder open volgens een meridiaancirkel en een parallelcirkel $\left(\text{beide met straal } \frac{\pi}{4}\right)$, dan valt hij in twee zulke deelen uiteen: Euclidisch gezien zijn er vier deelen, waarvan echter telkens twee overstaande in het Euclidisch oneindige elliptisch-meetkundig samenhangen.

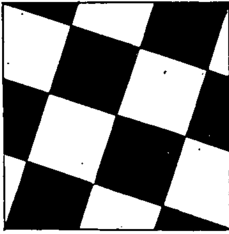


Fig. 3.

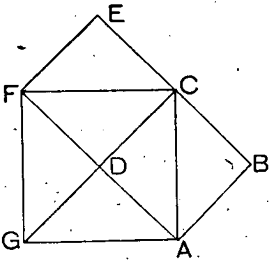


Fig. 4.

Neemt men

$$m_1 = \frac{p}{q}, \quad m_2 = -\frac{p}{q},$$

dan wordt het oppervlak door de beide krommen verdeeld in $2\,pq$ ruiten, zie fig. 5, waar

$$m_1 = {}^2/_3, \; m_2 = -{}^2/_3, \; s = 12.$$

Voor dit geval levert de berekening der coördinaten van het hoekpunt

$$x = \frac{1}{2p}, \quad y = \frac{1}{2q},$$

dus is de oppervlakte eener ruit

$$2\,xy = \frac{1}{2pq}$$

en hun aantal $2\,pq$; voor het geval van het vierkant is

Fig. 5.

$$x = \frac{q}{p^2 + q^2}, \quad y = \frac{p}{p^2 + q^2},$$

dus is de oppervlakte van een vierkant

$$AB^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{p^2 + q^2}.$$

en hun aantal $p^2 + q^2$.

§ 4. Als laatste voorbeeld van een niet-Euclidisch oppervlak, waarvan eene lengte-trouwe Euclidische kaart kan worden gemaakt, bespreken wij den *grensbol* der *hyperbolische* meetkunde, dat is een oppervlak binnen Ω, dat met Ω zelf en een dubbel geteld raakvlak aan Ω tot één bundel behoort. Neemt men voor Ω weder den eenheidsbol om O, dan bestaat de basiskromme van dien bundel uit de twee isotrope rechten op den eenheidsbol door het raakpunt O′ getrokken, beide dubbel geteld. Doorsneden met vlakken door O′ zijn *grenscirkels*, d.w.z. kegelsneden, die de absolute kegelsnede van hun vlak vierpuntig raken.

Trekt men in O′ twee onderling loodrechte raaklijnen aan Ω, $O'X_\infty$ en $O'Y_\infty$, dan zullen twee vlakken, waarvan het eene door $O'X_\infty$ gaat, het andere door $O'Y_\infty$, elkander hyperbolisch-loodrecht snijden, immers die vlakken gaan door twee t.o.v. Ω geconjugeerde rechten, zij zijn dus zelf t.o.v. Ω geconjugeerd.

De beide stelsels vlakken, resp. door $O'X_\infty$ en $O'Y_\infty$, snijden op den grensbol twee stelsels grenscirkels in, die elkander hyperbolisch-loodrecht snijden; hunne doorgangen met het raakvlak aan dien grensbol in het tweede snijpunt met O′O zijn, Euclidisch gezien, twee onderling loodrechte stelsels van evenwijdige lijnen; de verwantschap tusschen grensbol en raakvlak is eene *quasi-stereografische projectie* van den grensbol G op dat raakvlak als tafereel.

Er blijft te bewijzen, dat met eene quadrilleering volgens de richtingen X_∞ en Y_∞ in het tafereel eene quadrilleering op G correspondeert, zoodat, volgens § 1, onze quasi-stereographische projectie uit O′ eene lengte-trouwe Euclidische kaart oplevert van het niet-Euclidische oppervlak G.

Hiertoe beschouwen wij fig. 6, die eene doorsnede is van de ruimte-figuur met het vlak $OO'X_\infty$. In de figuur wordt de vierpuntige raking in O′ van ω en γ verkregen door de lange as van γ gelijk te maken aan O′E. Euclidisch gelijke stukken AB′ = B′C′ = C′D′ = ... in het tafereel zijn de projecties van hyperbolisch gelijke bogen AB = BC = CD .... op G. Immers eene centraal-involutorische collineatie, op O′C als as en hare pool P_c t.o.v. Ω

als centrum, laat niet alleen ω invariant, maar ook γ, daar deze moet overgaan in eene kegelsnede, welke opnieuw ω in O′ vierpuntig raakt en door C gaat, dat is in zichzelf. In deze collineatie correspondeeren de rechten O′B′ en O′D′ (daar B′C′ = D′C′ en B′D′ // $O'P_c$), dus correspondeeren ook de bogen BC en CD en zijn hyperbolisch gelijk. Door voor C achtereenvolgens alle punten der rij B, C, D, ... te nemen, volgt AB = BC = CD = ... Op dezelfde wijze kan men in het vlak $OO'Y_\infty$ op den grenscirkel bogen van lengte AB afpassen en ontstaat op den grensbol een rechthoekig netwerk van grenscirkels, dat in de kaart een netwerk van Euclidisch gelijke vierkanten tot projectie heeft.

Fig. 6.

Doch ook de mazen van het net op G zijn „vierkanten", onderling hyperbolisch gelijk. Immers G is invariant voor elke centraal-involutorische collineatie op eene pool P, gelegen op $O'X_\infty$ of $O'Y_\infty$, en het poolvlak t.o.v. Ω. Legt men dit poolvlak door het Euclidische midden van A en B′, dan volgt hieruit eene hyperbolische symmetrie van de figuur met zijde AB in de eene richting, evenzoo is de figuur symmetrisch in de tweede richting, zij is (daar de hoek bij A recht was en de in A samenkomende zijden gelijk zijn) een vierkant.

Legt men daarna het poolvlak door B, dan blijkt dat de figuur op BC met de vorige symmetrisch is, zij is dus opnieuw een vierkant, gelijk aan het vorige. Op deze wijze in beide richtingen voortgaande blijkt de onderlinge congruentie van alle mazen van het net op G.

Daar de quadrilleering door het aanbrengen van symmetrievlakken onbeperkt verfijnbaar is, is de projectie eene lengte-trouwe Euclidische kaart.

Cirkels in de kaart (Euclidisch) correspondeeren met cirkels op den grensbol, met het Euclidische middelpunt in de kaart correspondeert het hyperbolische op G.

De kaart vult het geheele vlak, ze is *aperiodisch.*

Alle geodetische krommen op het oppervlak zijn *algebraïsch,*

het zijn de *grenscirkels*, correspondeerende met de rechte lijnen in de kaart.

§ 5. Wij vonden voor den omw.cilinder der hyperbolische meetkunde eene parallel-strook als enkel-periodieke Euclidische kaart (evenals in het Euclidische geval), voor den omw.cilinder der elliptische meetkunde eene ruit als dubbel-periodieke kaart (welke bij den rechthoekigen cilinder tot een vierkant werd), voor den grensbol der hyperbolische meetkunde het geheele vlak als aperiodische kaart.

Al deze kaarten zijn *lengte-trouw*, de mogelijkheid van zulk eene lengte-trouwe Euclidische vlakke kaart wordt ook wel uitgedrukt door de zegswijze, dat op het niet-Euclidische oppervlak „de Euclidische meetkunde geldt". Dit wil dan zeggen, dat de betrekkingen tusschen de niet-Euclidische maatgetallen van de zijden en hoeken van een door, voor niet-Euclidische maat geodetische, bogen gevormden driehoek op het oppervlak dezelfde zijn als die tusschen de zijden en hoeken van een gewonen rechtlijnigen driehoek in het Euclidische platte vlak.

Omgekeerd kan ook op een Euclidisch oppervlak eene der niet-Euclidische meetkunden gelden, het eenvoudigste voorbeeld is de bol, waarop de elliptische meetkunde geldig is. Van den Euclidischen bol kan dus eene lengte-trouwe elliptische kaart worden gemaakt — bijv. door projectie uit het middelpunt op een raakvlak, de absolute kegelsnede der kaart is de cirkel met straal iR om het raakpunt, met één punt der kaart correspondeeren nu echter twee overstaande punten van den bol.

HET ONDERWIJS IN DE BEGINSELEN DER VLAKKE MEETKUNDE [1])

DOOR

P. G. J. VREDENDUIN.

Het onderwijs in de vlakke meetkunde is in de aanvang een merkwaardige mengeling van enerzijds zich beroepen op de aanschouwing en anderzijds juist een expliciet de leerlingen bijbrengen van het verbod van de aanschouwing gebruik te maken. Deze opmerking is niet als verwijt bedoeld. Integendeel. Het is didactisch onvermijdbaar de axiomatische basis der streng opgebouwde planimetrie door een soepelere fundering te vervangen. En deze fundering levert de aanschouwing. Toch doen zich soms eigenaardige moeilijkheden voor, waarop m.i. kritiek zeer wel mogelijk is.

We vragen de leerlingen te bewijzen de stelling: als twee rechten door een derde onder gelijke overeenkomstige hoeken gesneden worden, dan zijn ze evenwijdig. De leerling, die omtrent het bewijs nog geen enkele aanwijzing gekregen heeft, zegt (ten minste, indien hij iets zegt): verschuif $\angle B_1$ evenwijdig, zodat B verplaatst wordt naar A. Omdat $\angle B_1 = \angle A_1$, zullen de beide hoeken elkaar dan bedekken. Door evenwijdige verschuiving gaat m over in l, dus was $l // m$, q.e.d.

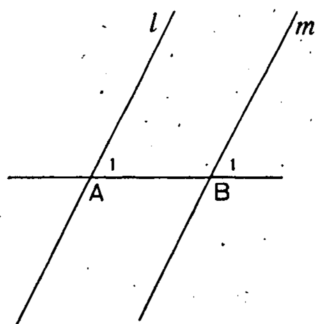


Fig. 1.

Het is mij meermalen overkomen, dat een dergelijk bewijs spontaan door den leerling gefantaseerd wordt. Ik heb het natuurlijk moeten afkeuren, daar in het bewijs de stelling reeds als juist vooronderstelde wordt. We accepteren nl., dat gedurende de verschuiving, waarbij B langs A beweegt, de

[1]) Inhoud van een lezing gehouden voor Wimecos te Utrecht op 29-12-'42.

richting van *m* niet verandert. Toch kunnen we dit bewijs ook anders interpreteren. We accepteren als aanschouwelijk duidelijk de eigenschappen van een bepaald soort verplaatsing van figuren, nl. van de evenwijdige verschuiving. Dan is het bewijs te verdedigen. Zo heeft de leerling het bedoeld. Hij beriep zich op aanschouwelijke evidentie. Maar beroep op de aanschouwing is immers niet openlijk toelaatbaar! Dus geven we een bewijs, waarbij de ene helft van de figuur een merkwaardige zwaai maakt en op de andere helft terecht komt. Ook hier wordt de aanschouwing te hulp geroepen. Het zal wel geen enkelen leerling duidelijk zijn, waarom dit thans wel geoorloofd is.

Het bewijs van de stelling, dat overstaande hoeken gelijk zijn, willen de leerlingen steeds geven door de ene hoek 180° te laten draaien en daardoor de andere te laten bedekken. Wat is draaien, vraagt de consequente leraar, die de aanschouwing als hulpmiddel wil ontwijken. Toch zal geen leerling begrijpen, waarom nu plots een omzwaai uit den boze is. En waarom mogen we bij het bewijs van de stelling der gelijkheid van basishoeken van een gelijkbenige driehoek deze weer wel een gecompliceerde beweging laten maken? Ik heb zelfs eens van een leerling der eerste klasse spontaan te horen gekregen, dat het bewijs fout was, want het platte vlak werd verlaten en we hadden toch afgesproken alleen vlakke meetkunde te bedrijven!

De verklaring is natuurlijk hierin te vinden, dat we de aanschouwing zoveel mogelijk wensen te vermijden, maar dat dit uiteraard niet steeds mogelijk is, tenzij we de leerlingen onder axioma's willen begraven. Het verdient m.i. aanbeveling ons er nauwkeurig rekenschap van te geven in hoeverre aanschouwelijke gegevens getolereerd worden. We zullen daarom de gebruikelijke opbouw der schoolmeetkunde vergelijken met de axiomatische opbouw, zoals die door Hilbert gegeven is [1]).

We beginnen meestal met een aanschouwelijke explicatie van de begrippen punt, rechte lijn, lijnstuk, halve rechte, verlengde, hoek. Daarbij wordt expliciet vermeld het axioma, dat door twee punten steeds één en niet meer dan één rechte gaat. De inhoud der tweede groep axioma's, die der ordening, wordt nimmer vermeld. De ordeningseigenschappen, die ten grondslag liggen aan de begrippen

---

1) Vgl. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1. Kapitel.

lijnstuk, halve rechte, verlengde, hoek worden steeds, m.i. terecht, aan de aanschouwing ontleend.

Daarna volgen de gelijkheid en ongelijkheid van lijnstukken en hoeken en de congruentie van figuren. De aanschouwelijke fundering hiervan correspondeert met de congruentieaxioma's van H i l b e r t, die globaal de volgende inhoud hebben:

1. Op een rechte l bevindt zich ter weerszijden van een punt A van die rechte één en niet meer dan één punt B, zodat AB gelijk is aan een gegeven lijnstuk CD.
2. Ter weerszijden van een halve rechte bevindt zich één en niet meer dan één halve rechte, die met deze het eindpunt gemeen heeft en er een hoek mee maakt, die gelijk is aan een gegeven hoek.
3. De gelijkheid van lijnstukken en hoeken is transitief.
4. Als twee driehoeken twee paar zijden en de ingesloten hoeken gelijk hebben, dan zijn zij congruent.

Het derde congruentieaxioma van H i l b e r t is buiten beschouwing gelaten, de overige zijn iets te ruim van inhoud weergegeven. Het gaat hier echter alleen om de strekking der axioma's.

Deze axioma's worden in de schoolmeetkunde vervangen door een niet nader omschreven begrip verplaatsing van figuren. Als we deze verplaatsing nader zouden willen karakteriseren, dan zou misschien het volgende axioma doelmatig zijn:

Axioma. Het is steeds mogelijk een gegeven figuur zodanig te verplaatsen, dat lijnstukken in daaraan gelijke lijnstukken, hoeken in daaraan gelijke hoeken overgaan en dat bovendien een gegeven halve rechte l overgaat in een gegeven halve rechte l' en een gegeven punt, dat niet op l of op het verlengde ervan ligt, overgaat in een punt, dat aan een gegeven kant van l' ligt. Het resultaat der verplaatsing is dan ondubbelzinnig bepaald.

De bewijzen in de schoolplanimetrie gebruiken meestal dit axioma zonder het te vermelden. Het axioma wordt waarschijnlijk daarom niet vermeld, omdat het een definitie van gelijkheid van lijnstukken en hoeken onmogelijk maakt. Als we bovengenoemd congruentieaxioma 3 betreffende de transitiviteit stilzwijgend aannemen en bovendien aannemen, dat een lijnstuk niet gelijk is aan een lijnstuk, dat er een echt deel van is, en een hoek niet gelijk aan een hoek met hetzelfde hoekpunt, die er een echt deel van is, dan volgen uit het opgestelde axioma der verplaatsing direct de congruentieaxioma's 1, 2 en 4.

We vragen ons nu af: kunnen we uit de gegevens, die we aan de aanschouwing ontlenen, niet een gelukkigere keus doen, zodat er een minder grote wanverhouding bestaat tussen de intuïtie van den leerling èn de loop der bewijzen en dat tevens nauwkeuriger omschreven wordt, welke eigenschappen aan de aanschouwing ontleend worden. Daartoe wenden we ons weer tot het begrip verplaatsing, dat voor den leerling intuïtief duidelijk is en trachten hieraan een basis voor de ontwikkeling der begrippen gelijkheid, ongelijkheid, congruentie en symmetrie te ontlenen.

Allereerst merken we daartoe op, dat het algemene en vrij vage begrip verplaatsing gepreciseerd kan worden door de verschillende soorten verplaatsing te beschouwen, waaruit elke verplaatsing opgebouwd kan gedacht worden. Deze verschillende soorten verplaatsing zijn de evenwijdige verschuiving (of kortweg verschuiving), de draaiing en de spiegeling. De laatste biedt de meeste moeilijkheden, omdat, ingeval we de spiegeling als een aanschouwelijk uitgevoerde beweging willen denken, hierbij het platte vlak verlaten wordt. We laten dus de spiegeling voorlopig achterwege. We stellen vast:

De *eigenschappen van een verschuiving* zijn:

1e. een rechte gaat over in een daaraan evenwijdige rechte of in zich zelf,

2e. een lijnstuk gaat over in een daaraan gelijk lijnstuk,

3e. een hoek gaat over in een daaraan gelijke hoek,

4e. er is steeds een verschuiving mogelijk, waarbij een gegeven punt P in een gegeven punt P′ overgaat.

De *eigenschappen van een draaiing* zijn:

1e. een rechte gaat over in een rechte,

2e. een lijnstuk gaat over in een daaraan gelijk lijnstuk,

3e. een hoek gaat over in een daaraan gelijke hoek,

4e. er is steeds één punt, dat bij een draaiing niet van plaats verandert (dit punt heet het *centrum van de draaiing*),

5e. als bij een draaiing met centrum C punt A overgaat in A′, punt B in B′, dan is $\angle ACA' = \angle BCB'$ (deze hoek heet de *hoek van draaiing*),

6e. er is steeds een draaiing mogelijk met een gegeven punt als centrum, waarbij een gegeven halve rechte met het centrum als eindpunt overgaat in een gegeven halve rechte met het centrum als eindpunt.

Moeten we hier definitie of moeten we er axioma voorzetten? Ik zou er me niet in willen verdiepen. *We moeten, ten einde ons geometrische gebouw te kunnen optrekken, eerst een aanschouwelijke basis hebben. Zolang we nog bezig zijn aan het leggen van deze basis heeft het geen zin de termen definitie en axioma te gebruiken.* De leerling begrijpt er de strekking toch niet van. We zijn hier in het voorstadium der *explicatie,* dat didactisch onmisbaar is, doch bij een strenge opbouw natuurlijk vervangen moet worden door een stel axioma's en definities. Het heeft didactisch geen zin een verschuiving te definiëren door de eigenschappen 1—3 een draaiing door de eigenschappen 2, 4 en 5 en dan de overige eigenschappen axioma's te noemen.

We vervolgen onze explicaties met het onderzoek naar *gelijkheid en ongelijkheid van lijnstukken.* Laat gegeven zijn twee lijnstukken AB en CD. We verschuiven AB, zodat A in C valt, AB gaat daarbij over in een lijnstuk CB′. Nu draaien we CB′ om C over een hoek gelijk aan ∠ B′CD. Dan valt B′ in een punt B″, dat op de halve rechte CD ligt. Er zijn nu drie mogelijkheden:

1e. B″ valt samen met D; dan zijn, zoals we reeds weten, de lijnstukken AB en CD *aan elkaar gelijk* (de transitiviteit der gelijkheid is bij deze uitspraak weer stilzwijgend aangenomen),

2e. B″ ligt tussen C en D; we zeggen dan, dat AB *kleiner* is dan CD,

3e. B″ valt op het verlengde van CD; we zeggen dan, dat AB *groter* is dan CD.

Voordat we beginnen met de explicatie van gelijkheid en ongelijkheid van hoeken, vermelden we eerst, dat we onder een *hoek* zullen verstaan een figuur, die bestaat uit twee halve rechten met gemeenschappelijk eindpunt. Een hoek beschouwen we dus niet als een deel van een plat vlak. Het onderscheid tussen in- en uitspringende hoeken vervalt hiermee. Een uitbreiding van het hoekbegrip kan voorlopig achterwege blijven.

Laat nu gegeven zijn twee hoeken, ∠ BAC en ∠ EDF, welke geen van beide gestrekt zijn. We verschuiven ∠ BAC, zodat A overgaat in D. Daarbij gaat ∠ BAC over in een hoek, die we ∠ B′DC′ noemen. Daarna draaien we ∠ B′DC′ om D, zodat één der benen van deze hoek langs een been valt van ∠ EDF, terwijl de beide andere benen van deze twee hoeken aan dezelfde kant van het gemeenschappelijke been komen te liggen. Laat b.v. het been

DB′ hierbij overgaan in DE en DC′ in een halve rechte, die we DC″ noemen. Er zijn nu drie mogelijkheden:

1e. DC″ valt samen met DF; dan zijn, zoals we reeds weten, ∠ BAC en ∠ EDF *aan elkaar gelijk,*

2e. DC″ valt binnen ∠ EDF; we zeggen dan, dat ∠ BAC *kleiner* is dan ∠ EDF,

3e. DC″ valt buiten ∠ EDF; we zeggen dan, dat ∠ BAC *groter* is dan ∠ EDF.

Ten slotte spreken we af, dat we elke niet gestrekte hoek kleiner dan een gestrekte zullen noemen.

Ik kan mij voorstellen, dat men bezwaar heeft tegen de talloze lacunes, die uit wetenschappelijk oogpunt in deze behandelingswijze verborgen liggen. Een bezwaar vind ik deze niet. We kunnen dergelijke fouten toch niet omzeilen, als we ons tot hoofddoel stellen een fundament aan de planimetrie te geven, dat didactisch deugdelijk is voor een verdere opbouw. Dat verschillende omstandigheden, die de leerling als vanzelf duidelijk aanvaardt, niet expliciet vermeld worden, is een didactisch voordeel. Het vermelden ervan zou slechts tot een nodeloos uit het hoofd leren leiden. Om enige concrete bezwaren te noemen: het is niet direct duidelijk, dat uit AB > CD volgt CD < AB, ook niet, dat de gelijkheid symmetrisch is, verder is niet vermeld, dat twee lijnstukken alleen dan maar gelijk zijn, als ze op de bovengenoemde wijze tot samenvallen te brengen zijn (het is nodig dit te vermelden willen niet twee lijnstukken tegelijk gelijk en ongelijk kunnen zijn). Het is echter volslagen nutteloos deze dingen te vermelden op een tijdstip, dat de leerling nog niet of nauwelijks kan inzien, dat deze lacunes bestaan, en zeker niet de noodzakelijkheid ervan inziet, dat b.v. vermeld wordt, dat de gelijkheid transitief en symmetrisch is.

Nadat thans het aanschouwelijke fundament in hoofdtrekken voltooid is, kan met de deducties begonnen worden.

Stelling 1. Twee overstaande hoeken zijn gelijk.

Bewijs. Draaien we de ene hoek 180° om het hoekpunt, dan gaat deze hoek over in de overstaande. Dus zijn de beide hoeken aan elkaar gelijk.

Stelling 2. De bissectrices van overstaande hoeken liggen in elkaars verlengde.

Bewijs. We draaien de ene hoek met zijn bissectrix om het hoekpunt over een hoek van 180°. De hoek gaat dan over in zijn

overstaande, de bissectrix dus in de bissectrix van de overstaande hoek. Daar ten gevolge van een draaiing over 180° de ene bissectrix in de andere overgaat, liggen beide bissectrices in elkaars verlengde.

Hoeveel rechten gaan er door één gegeven punt P, dat niet op een gegeven rechte l ligt, evenwijdig aan l? We weten reeds, dat er in elk geval één is. Daartoe kiezen we op *l* een punt Q en verschuiven *l*, zodat Q overgaat in P. Daarbij gaat volgens de eigenschappen der verschuiving *l* over in een rechte door P en evenwijdig aan *l*. Is er nog een tweede? We zien geen kans de ontkenning hiervan te bewijzen. Nu de deductie een aanvang genomen heeft, heeft het zin hier de eigenschap, dat er geen twee dergelijke rechten bestaan, expliciet als *axioma* te vermelden. We kunnen er eventueel terloops op wijzen, dat reeds meer eigenschappen zonder bewijs aanvaard werden en dat dus in het voorgaande reeds vaker axioma's opgesteld zijn, zonder dat daarbij vermeld werd, dat we met axioma's te maken hadden.

We kunnen het probleem ook anders oplossen en de term axioma geheel vermijden. We voegen dan nog twee eigenschappen toe aan de eigenschappen der verschuiving, die we als direct aanschouwelijk duidelijk accepteren, nl.:

5e. er is steeds een verschuiving mogelijk, waarbij een gegeven rechte overgaat in een gegeven daaraan evenwijdige rechte,

6e. de som van twee verschuivingen is weer een verschuiving.

Uit deze beide eigenschappen leiden we af, dat twee rechten, die beide evenwijdig aan een derde rechte zijn, ook aan elkaar evenwijdig zijn. Hieruit volgt dan weer, dat er door een punt buiten een rechte geen twee rechten mogelijk zijn, die beide aan die rechte evenwijdig zijn. Ik geef aan de eerste manier de voorkeur.

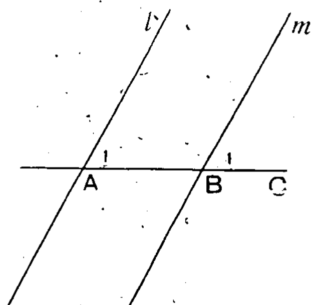


Fig. 2.

We vermelden verder alleen die stellingen, waarvan de bewijzen van het traditionele afwijken.

Stelling 3. Als twee rechten door een derde onder gelijke overeenkomstige hoeken gesneden worden, dan zijn die rechten evenwijdig.

Bewijs. Verschuif $\angle B_1$, zodat B overgaat in A. Het ene been BC van $\angle B_1$ gaat dan over in het been AC van $\angle A_1$. Omdat de

hoeken aan elkaar gelijk zijn, zal het andere been van $\angle B_1$ dan ook overgaan in het andere been van $\angle A_1$. Uit de 1e eigenschap der verschuiving volgt, dat deze beide benen dan evenwijdig zijn, m.a.w. $l \parallel m$.

Stelling 4. Als twee evenwijdige rechten door een derde gesneden worden, dan zijn twee overeenkomstige hoeken gelijk.

Bewijs. Verschuif $\angle B_1$, zodat B overgaat in A. Daarbij gaat *m* over in de enige rechte door A, die evenwijdig aan *m* is, dus in *l*. De halve rechte BC gaat over in AC. Dus gaat $\angle B_1$ over in $\angle A_1$, waaruit volgt $\angle B_1 = \angle A_1$.

Opmerking. We kunnen deze stelling ook beschouwen als bijzonder geval van de stelling, dat twee hoeken, waarvan de benen evenwijdig aan elkaar zijn of langs dezelfde rechte vallen, gelijk of elkaars supplement zijn. Deze stelling wordt dan analoog bewezen.

Thans completeren we ons aanschouwelijke fundament door ook de spiegeling te expliceren.

De *eigenschappen van een spiegeling* zijn:

1e. een rechte gaat over in een rechte,

2e. een lijnstuk gaat over in een daaraan gelijk lijnstuk,

3e. een hoek gaat over in een daaraan gelijke hoek,

4e. er is een rechte, waarvan alle punten in zich zelf overgaan (deze rechte heet de *as van spiegeling*),

5e. een punt P gaat over in een punt, dat we als volgt verkrijgen: laat uit P een loodlijn neer op de as van spiegeling, noem het voetpunt Q, verleng PQ met een daaraan gelijk lijnstuk, het andere uiteinde van dit lijnstuk is P′.

Opmerkingen. Voorafgegaan is blijkbaar de stelling, dat de som der hoeken van een driehoek 180° bedraagt, en de daaruit volgende stelling, dat er door een punt geen twee loodlijnen op een rechte neergelaten kunnen worden. De existentie van een rechte hoek en daarmee de mogelijkheid uit een punt op een rechte een loodlijn neer te laten is stilzwijgend aanvaard.

We zouden hier de eigenschappen 4 en 5 als definitie van een spiegeling kunnen opvatten, de eigenschappen 1—3 zijn dan axioma's.

Definitie. Als twee figuren door een spiegeling t.o.v. een as *l* in elkaar kunnen overgaan, dan heten ze *symmetrisch t.o.v. l*.

Opmerking. Desgewenst kan men er den leerling op opmerk-

zaam maken, dat de symmetrie een wederkerige betrekking is, daar, als bij een spiegeling P overgaat in P′, ook P′ overgaat in P.

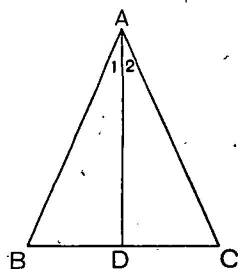


Fig. 3.

Stelling 5. De basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn gelijk.

Bewijs. Trek de bissectrix AD van de tophoek A. Spiegel △ ABD t.o.v. van as AD. Volgens de 3e eigenschap der spiegeling gaat dan ∠ A_1 over in ∠ A_2 en dus de halve rechte AB in AC. Omdat AB = AC, gaat dan volgens de 2e eigenschap B over in C. Verder gaat D over in D (4e eig.) en dus BD in CD (2e eig.). Hieruit zien we, dat ∠ B over is gegaan in ∠ C, dus zijn deze hoeken aan elkaar gelijk (3e eig.).

Gevolg. De bissectrix van de tophoek van een gelijkbenige driehoek is tevens hoogtelijn en zwaartelijn (volgt uit de 5e eigenschap).

Definitie. Elke verschuiving, draaiing, spiegeling of reeks van achtereenvolgens uitgevoerde verschuivingen, draaiingen en spiegelingen heet een *verplaatsing.*

Definitie. Kunnen twee figuren door verplaatsing in elkaar overgaan, dan heten ze *congruent met elkaar.*

Tot slot bewijzen we nog het *congruentiegeval* ZHZ.

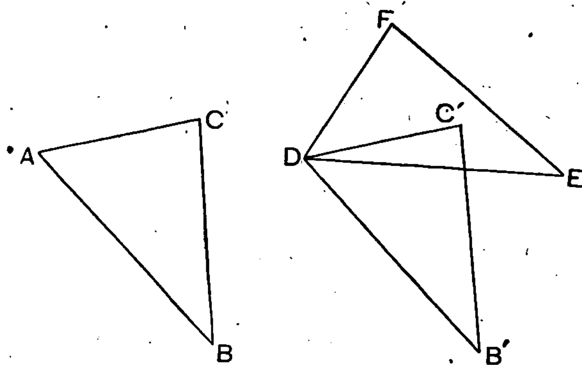


Fig. 4.

Gegeven. ∠ A = ∠ D, AB = DE, AC = DF.

Te bewijzen. △ ABC ≌ △ DEF.

Bewijs. Verschuif △ ABC, zodat A overgaat in D. Daarbij

gaat △ ABC over in een driehoek, die we △ DB′C′ noemen. Nu draaien we △ DB′C′ om D, zodat de halve rechte DB′ overgaat in DE. Omdat DB′ = DE, gaat daarbij B′ over in E. C′ gaat over in een punt, dat we C″ noemen. Er zijn nu twee mogelijkheden.

1e. DC″ en DF vallen aan dezelfde kant van DE. Omdat ∠ B′DC′ = ∠ EDF, gaat dan de halve rechte DC′ over in DF. Omdat AC = DF en dus ook DC″ = DF, valt dan C″ samen met F. Dan is dus △ ABC zo verplaatst, dat hij overgegaan is in △ DEF. Beide driehoeken zijn dus congruent met elkaar.

2e. DC″ en DF vallen aan verschillende kanten van DE. We spiegelen △ DC″E t.o.v. DE. Daarbij gaat ∠ EDC″ over in ∠ EDF, omdat beide hoeken aan elkaar gelijk zijn. De halve rechte DC″ gaat dus over in DF. Omdat DC″ = DE, gaat weer C″ over in F, waarmede de congruentie aangetoond is.

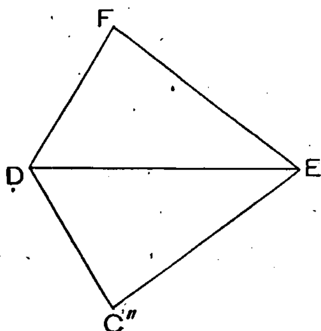


Fig. 5.

Het voordeel van deze behandelingswijze is m.i., dat nauwkeuriger de aanschouwelijke basis omschreven en van het deductieve systeem gescheiden is, terwijl voorts verschillende bewijzen eenvoudiger en beter aangepast aan de intuïtie van den leerling zijn. Alleen de bewijzen der congruentiestellingen zijn ingewikkelder geworden.

Ten slotte merken we nog op, dat geen poging gedaan is om het onmogelijke mogelijk te doen schijnen door een definitie te geven van gelijkheid van lijnstukken en hoeken. Deze grondrelatie der planimetrie is alleen geëxpliceerd, hetgeen in de strenge opbouw correspondeert met een vastleggen van de betekenis ervan door middel van axioma's.

UIT HET VERSLAG VAN DE STAATS-COMMISSIE 1942.

De gemiddelde cijfers voor de *wiskunde* bedroegen in de jaren 1940, 1941 en 1942 voor de stelkunde van de A-candidaten onderscheidenlijk 5,41; 5,77; 5,50; voor de meetkunde van de A-candidaten 5,25; 5,55; 5,33. Minder dan het cijfer 4 moest in genoemde jaren worden toegekend vóór de stelkunde aan 30 van de 212; 22 van de 198; 34 van de 254; voor de meetkunde aan 27 van de 213; 25 van de 199; 40 van de 252 geëxamineerde A-candidaten. Vele candidaten toonen nog steeds een groot gebrek aan inzicht ten aanzien van de fundamenteele begrippen en ten aanzien van de bewerkingen, die moeten worden uitgevoerd. Dit bleek bij de A-candidaten vooral, als er gesproken werd over reële en imaginaire, meetbare en onmeetbare getallen. Een onmeetbaar getal werd in den regel „gedefinieerd" als „een getal waaruit de wortel niet te trekken is". Waarom $\sqrt{3}$ niet tot de meetbare getallen behoort, kon zelden zonder veel hulp van den examinator worden aangetoond. Vragen als „wanneer is $\sqrt{(x^2 - 5x - 24)}$ reëel?, „waarom is $\sqrt[3]{(x^2 - 5x - 24)}$ en $\sqrt{(x^2 - 5x + 24)}$ steeds reëel?" leverden vaak niet geringe moeilijkheden op.

De subcommissie stelt er geen prijs op, dat men door middel van uit het hoofd geleerde goocheltoeren met een a, een b en een c naast een lineaire of een quadratische functie van een veranderlijke een rechte lijn of een „parabool" weet te teekenen, maar zij eischt een helder inzicht in de beteekenis van de graphiek van dergelijke functies en een welberedeneerde methode ter bepaling van uiterste waarde, as van symmetrie, enz. Dat aan dat inzicht bij velen nog wel het een en ander ontbrak, werd gedemonstreerd door uitlatingen als „de coördinaten van een punt snijden elkaar in een lijn" of „een parabool is een kromme lijn, die men heeft, wanneer x een vergelijking van den tweeden graad is". Een vraag als „voor welke punten van het platte vlak geldt, dat $2x - y + 3 < 0$?" past niet in het van buiten geleerde schema van zulke candidaten, zoodat de

examinator ondanks groote inspanning niet toekwam aan de vraag: „voor welke punten van het platte vlak geldt dat

$$(2x - y + 3)\ (x + 2y - 5) \gtreqless 0?".$$

Hoewel de techniek van het oplossen van eenige vergelijkingen met evenveel onbekenden meestal geen bezwaar opleverde, bleek ook hier, zelfs bij enkele B-candidaten, gebrek aan inzicht bij de discussie van m vergelijkingen met n onbekenden, waarbij $m \neq n$. Dat twee of meer vergelijkingen strijdig of onderling afhankelijk kunnen zijn, was aan vele examinandi niet bekend. Ook wisten velen niet, dat bij herleidingen van vergelijkingen de mogelijkheid bestaat dat er oplossingen worden ingevoerd.

Ook in de meetkunde zijn talrijke A-candidaten nog te zeer gewend aan automatisch werken en het uit het hoofd leeren van formules. Door sommigen scheen de bepaling, volgens welke van oppervlakten en inhouden van den bol en zijn deelen „de afleiding der formules" dit jaar niet zou worden gevraagd, als een aansporing tot formule-dressuur te zijn opgevat. Het maakt een eigenaardigen indruk, als een candidaat wel mededeelt, dat de oppervlakte van een cirkelsector gelijk is aan $\frac{a}{360} \times \pi r^2$, maar niet in staat is de oppervlakte van een cirkelsector te bepalen, waarvan de middelpuntshoek gelijk is aan 120°, omdat hij zich niet weet te herinneren wat die a beteekent. Zoo was het voor een groot aantal candidaten een onoplosbaar raadsel, waar bij de inhoudsbepaling van een pyramide de factor $^1/_3$ vandaan komt. Het verband tusschen het aantal hoekgraden van een hoek en het aantal booggraden van een cirkelboog was menigeen niet duidelijk. Dat het middelpunt van den omgeschreven cirkel van een rechthoekigen driehoek eenvoudiger bepaald kan worden dan met behulp van de middelloodlijnen der zijden, was tot sommigen nog niet doorgedrongen. Het uitvoeren van constructies met behulp van een algebraïsche analyse gaf bij verscheidene examinandi redenen tot voldoening, maar het werken met meetkundige plaatsen liet dikwijls veel te wenschen over, zoowel in de planimetrie als in de stereometrie. De veel voorkomende bepaling van het snijpunt van een lijn met een vlak of van de doorsnede van een plat vlak met een door platte vlakken begrensd lichaam gaf meestal moeilijkheden. Overigens gelden voor de stereometrie nog dezelfde klachten als in vroegere verslagen zijn

geuit, wat betreft een ernstig tekort aan inzicht met betrekking tot den hoek van twee kruisende lijnen, een lijn evenwijdig met of loodrecht op een vlak, loodrecht op elkaar staande vlakken e.a.

Voor de B-candidaten waren de gemiddelde cijfers in de jaren 1940, 1941 en 1942 voor de stelkunde opvolgend 4,80; 5,65; 5,85; voor de meetkunde 5,60; 4,77; 4,56; voor de trigonometrie en analytische meetkunde 4,50; 5,23; 5,27. Een lager cijfer dan 4 behaalden in genoemde jaren voor de stelkunde 6 van de 38; 6 van de 34; 8 van de 55; voor de meetkunde 4 van de 34; 7 van de 19; 13 van de 40; voor de trigonometrie en analytische meetkunde 9 van de 38; 8 van de 34; 14 van de 55 candidaten.

Hoewel verscheidene B-candidaten blijk gaven van een degelijke voorbereiding, moet de subcommissie toch naar het vorige verslag verwijzen, omdat vrijwel dezelfde op- en aanmerkingen zijn blijven gelden.

De graphiek van $y = {}^{a}\log x$, zoowel voor $a > 1$ als voor $0 < a < 1$, was aan vele candidaten onbekend, zoodat de examinator aan de opgave „schets de graphiek van $y = \log \frac{x^2 - 3x}{x - 2}$" bij zulk een examinandus nauwelijks toekwam. Menig candidaat kon de belangrijkste eigenschappen der logarithmen niet bewijzen. De vraag om, als gegeven is, dat de som van de eerste n termen van een reeks gelijk is aan $n^2 + 3n$, aan te toonen, dat deze reeds een rekenkundige is, gaf soms groote moeilijkheid.

De resultaten van het schriftelijk werk in het onderdeel meetkunde waren zeer onvoldoende. Het gemiddelde van de toegekende cijfers bedroeg 3,62, terwijl het gemiddelde van de cijfers voor het schriftelijk werk in de stelkunde 5,66 en voor het schriftelijk werk in de trigonometrie, en analytische meetkunde 4,83 was. Dit verschijnsel, dat zich bijna geregeld voordoet, moet niet alleen geweten worden aan gebrekkig meetkundig inzicht en gemis aan routine bij de candidaten. Volgens het oordeel der subcommissie werken hiertoe ook mede de eigenaardige moeilijkheden, die overwonnen moeten worden om in een bepaalden tijd eerst een overzichtelijke teekening te maken en daarna langs den juisten weg en met vermijding van onnoodige complicaties de oplossing te vinden. Door het mondeling examen, waarbij de examinator voorzichtig kan leiden in de door hem gewenschte richting en waarbij hij zich toch een juist oordeel kan vormen over de capaciteiten van den candidaat, werd dit oor-

deel in bijna alle gevallen veel gunstiger dan uit het schriftelijk werk was af te leiden. Het zou voor de candidaten een aanmerkelijke verlichting beteekenen en toch de waarde van de opleiding en het gehalte van het examen niet schaden, indien het examen in het onderdeel meetkunde uitsluitend mondeling werd afgenomen, waarbij de toegewezen tijd voor dit mondeling onderzoek iets zou kunnen worden uitgebreid.

Het stemt de subcommissie tot voldoening, dat vele candidaten niet belast waren met een overdaad van trigonometrische formules en toch, of misschien juist daardoor, in staat waren met behulp van de fundamenteele goniometrische betrekkingen, den sinus- en, zoo noodig, den cosinusregel het verlangde doel te bereiken.

Bij de analytische meetkunde kwam het euvel van het mechanisch toepassen van uit het hoofd geleerde formules weer sterk naar voren bij het bepalen van de vergelijking van een lijn door O (o, o) en P (x, y), waarvoor men dan $\frac{y - y_1}{0 - y_1} = \frac{x - x_1}{0 - x_1}$ opschreef. De bepaling van een meetkundige plaats, al of niet door eliminatie van één of meer parameters, gaf soms aanleiding tot fantastische resultaten, doordat de examinandus niet begreep dat hij moest trachten een betrekking te bepalen tusschen de coördidinaten van een willekeurig punt dier meetkundige plaats.

Ondanks alle genoemde en vele niet genoemde tekortkomingen meent de subcommissie over het algemeen toch een voortgaande verbetering te kunnen constateeren in de wijze waarop vele candidaten zich voor het examen voorbereiden.

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

19e JAARGANG 1942/43

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

BOEKBESPREKING.

Antieke en Moderne Kosmologie, door Dr. W. B. Kristensen, Dr. H. J. Pos, Dr. E. J. Dijksterhuis, Dr. J. H. Kramers, Dr. H. A. Kramers en Dr. J. H. Oort.
Van Loghum Slaterus' Uitgeversmaatschappij, 1941. (*f* 3,10 en *f* 3,95).

Dit werk is reeds geruimen tijd geleden verschenen en plaatsing van de destijds samengestelde bespreking ervan voor dit tijdschrift is wegens gebrek aan plaatsruimte ten zeerste vertraagd. Toch zouden wij voor de lezers van Euclides niet gaarne een bespreking achterwege laten waar de aard van het onderwerp zoo belangrijk is en ook waar de litteratuur over dit onderwerp in onze taal zoo beperkt is. Een gevolg van deze bespreking moge dan ook zijn, dat vele lezers nog eens tot het beschouwen van de in het werk behandelde problemen mogen worden gestimuleerd.

Dit werk bevat de gezamenlijke voordrachten gehouden op een studieconferentie van de groep „Klassieke Oudheid" in de Internationale School voor Wijsbegeerte te Amersfoort.

Indien de samenstellers van deze bundel over „Antieke en Moderne Kosmologie" geen ander doel hebben beoogd, dan „om aan een kring van klassiek gevormde, maar niet speciaal natuurwetenschappelijk geschoolde hoorders een indruk te geven van den geleidelijken groei van de denkbeelden over den bouw van den Kosmos van de oudste tijden af tot heden" (pag. 7) dan zou men deze uitgave desnoods nog geslaagd kunnen noemen. Want ze geeft een indruk, een zwakke indruk. Maar ook niets meer; want daarvoor is de samenstelling te fragmentarisch en te willekeurig: er ontbreken aan de beschrijving te belangrijke schakels, dan dat deze aan niet-vakmenschen een bevredigend beeld van de geleidelijke groei van de „kosmologische" denkbeelden zou kunnen geven. Zoo wordt b.v. Aristoteles van Stagira slechts terloops vermeld (pag. 68), terwijl deze denker toch een van de voornaamste „kosmologen" is geweest, en van den allergrootsten invloed is geweest op de „kosmologische" begrippen der Middeleeuwen en ook lang daarna. (Verg.: J. Hunfeld, Hoe Leibniz tot de Monadenleer kwam. Nijmegen-Utrecht, 1940).

De algemeene opzet van deze bundel is zoodoende niet erg gelukkig, al valt er ook zeer veel te waardeeren.

Wat de afzonderlijke voordrachten betreft: de bijdrage van W. B. Kristensen „Kosmologische voorstellingen in de Vroegere Oudheid" is een interessante voordracht, die men echter liever zou hooren in een cursus over Godsdienstgeschiedenis of Mythologie, dan in een School voor Wijsbegeerte.

De bijdrage van H. J. Pos „De Kosmologie in Plato's Timaios" lijkt ons een van de beste; het is een rustige behandeling van een beperkt thema. En nog altijd geldt: „In der Beschränkung zeigt sich der Meister". Als vak-philosooph beheerscht de schrijver hier zijn onderwerp volkomen.

De eerste bijdrage van E. J. Dijksterhuis „Hellenistische Kos-

mologie" behandelt de astronomische opvattingen van Plato, Eudoxus van Knidos, Apollonius, Hipparchus en Ptolemaios op voortreffelijke wijze. Wel hadden wij hier voor Aristoteles een ruime plaats ingeruimd willen zien, maar de schrijver zegt: „Het is niet mijn taak hier over Aristoteles te spreken" (pag. 68).

Wat J. H. Kramers zegt over „Kosmologische Voorstellingen in de Middeleeuwen" kan men geen bijdrage noemen. Hij praat overal over, over zielkunde (pag. 109), over de vreugde van het bezit van de waarheid (pag. 109) en ook over kosmologie (in de zin van het voorwoord). Als hij zich de noodige zelfbeperking had opgelegd en zich aan zijn onderwerp had gehouden, zou zijn uiteenzetting het gemakkelijkst van allen tot een mooi geheel op te bouwen geweest zijn; nu echter wordt er veel gezegd, dat met groot succes achterwege kon blijven, en veel verzwegen, dat niet gemist mocht worden. De schrijver is zijn onderwerp niet meester: nu eens beweert hij dat Aristoteles „voor Thomas van Aquine en zijn School een nauwelijks voor kritiek vatbare autoriteit was geworden, mits men hem maar op de juiste wijze interpreteerde" (pag. 90), dan weer zegt hij: „over de materie der aardsche lichamen heeft Thomas zeer veel geschreven en gepolimiseerd tegen Avicenna en ook wel tegen Aristoteles" (pag. 107). Het kernpunt in de Aristotelische natuurphilosophie, het Hylemorfisme (stof—vorm—leer) heeft schrijver niet begrepen, want die prima materia vat Thomas niet op als een logische abstractie, maar als een potentia realis. Eén keer waagt de schrijver zich aan citaat (pag. 108); het is naar de schrijver opgeeft een passage uit „De Eternitate mundi contra murmurantes", waarin hij een petitio principii meent ontdekt te hebben. Nog afgezien van het feit, dat bedoelde passage niet voorkomt in het aangehaalde werk, maar te vinden is in S. Th. I. q. 46. a. 1. begaat de schrijver hier de fout een objectie te verwarren met de leer van Thomas, daarmee te kennen gevende de stijl en methode van Thomas niet te kennen, of niet ver genoeg doorgelezen te hebben. Maar waarom dan geciteerd?

In één idee is de schrijver werkelijk origineel; nl. in de visie die hij heeft op de zielkunde van Thomas; hij meent in de werken van Thomas te kunnen lezen „dat na 's menschen dood een nieuwe ziel ontstaat, als existentieele substantie-vorm van een meer geestelijke materie" (pag. 109). Jammer, dat hij niet verwijst, waar hij deze idee bij Thomas heeft opgediept, want dat zou een geheel ander licht werpen op de Thomistische zielkunde. (Men zie: S.c. Gent. II. 79; S. Th. I. q. 107. a. 4. c.; Q. D. De Anima, passim, etc.). Het verzoek van den schrijver „het hier ter berde gebrachte welwillend te willen beoordeelen" (pag. 110) is te veel gevraagd.

Een tweede bijdrage van E. J. Dijksterhuis „Van Coppernicus tot Newton" munt uit door helderheid en de volkomen beheersching waarmede deze stof wordt behandeld. Op de hem eigen wijze weet Dijksterhuis ook aan den niet-mathematisch geschoolden hoorder deze moeilijke stof duidelijk te maken. Deze schets over het ontstaan van de mechanistische kosmologie zet de wegen uiteen langs welke dit proces verliep: Coppernicus, Tycho Brahe, Keppler, Newton eenerzijds en Coppernicus, Galilei, Christiaan Huygens, Newton anderzijds met

daartusschen de figuur van Descartes. Het verzet tegen de nieuwe astronomie geeft Dijksterhuis op zeer juiste wijze weer, nl. niet als een conflict tusschen theologie en natuurwetenschap, maar als wat het in wezen was, nl. de oude strijd tusschen de Platonische natuurphilosophie en Aristoteles. Een prachtig artikel, dat, het zij terloops vermeld, een kostbaar bezit kan zijn voor docenten in de kosmografie.

De vermaarde Leidsche professor H. A. Kramers bespreekt „Kosmologische problemen en de moderne physica", waardoor in de bundel een sprong wordt gemaakt van twee eeuwen. Kramers stelt zich op het gezonde standpunt, dat de natuurwetten voor een groot deel van causaal karakter zijn (pag. 155), waardoor hij zich dus losmaakt van de positivisten, wier ideeën nog naklinken in A. Eddington. (A. Eddington: The nature of the physical world).

Wij hopen dat de schrijver bij een andere gelegenheid ook laat zien, dat het indeterminatie-princiep van Heisenberg een streng causaal karakter in het natuurgebeuren onderstelt,[1]) en dat de indeterminatie alleen gelegen is in onze kennis van het gebeuren, niet in het gebeuren zelf, en dat dus de uitdrukking van Dirac, dat „de natuur een keuze doet", onjuist is. Jammer dat de schrijver niets meer wil weten van het klassieke verschil tusschen substantia en accidens; het is toch o.i. onjuist, om onomstootelijk vaststaande grootheden te laten varen, om eenige moeilijkheden, die daaromtrent gerezen zijn.

In zijn eigenlijke onderwerp stipt de schrijver de nieuwere resultaten der theoretische astronomie aan, als daar zijn: kromming van de ruimte, uitdijing van het heelal, bouw van de vaste sterren.

De laatste bijdrage „Moderne opvattingen over de structuur van het heelal" van den vak-astronoom J. H. Oort, is geheel in exact-wetenschappelijke trant gehouden. Een fraai artikel, dat den leek veel wetenswaardigs biedt, waarbij hem het meest merkwaardig zal voorkomen „de verbeten strijd om een volgende decimaal" en de uiteenzetting van de buiten het kader van Newton's gravitatie-wet vallende verschijnselen, die zich opdrongen bij de waarneming van het heelal buiten het Melkwegstelsel.

Tenslotte: al vinden wij de algemeene opzet niet erg gelukkig en al hebben wij hier en daar eenige ernstige bedenkingen moeten kenbaar maken, de meeste afzonderlijke bijdragen geven toch zooveel, dat wij dit werk gaarne aanbevelen en het voor een ieder een waardevol bezit mogen noemen.

Roermond. Dr. H. A. Gribnau.

P. Wijdenes, *Lagere Algebra I:* Algebraische grootheden en hun bewerkingen. 4° Druk 1942, 276 pag., 20 fig., geb. ƒ 5,90.

Lagere Algebra II: Vergelijkingen, Functies, Grafieken, 4° Druk 1943, 448 pag., 150 fig., geb. ƒ 8,50.

Verscheen reeds eenigen tijd geleden de vierde druk van Lagere

[1]) De onzekerheidsrelaties veronderstellen juist het causaliteitsbeginsel, nl. dat de proefnemer noodzakelijkerwijze (door zijn licht-„quantum") het object beinvloedt en daardoor de nauwkeurigheid van onze kennis van positie en snelheid limiteert.

Algebra I, nu is met het verschijnen van de vierde druk van Lagere Algebra II, de nieuwe druk van het volledige werk voltooid.

De nieuwe druk wijkt volgens den schrijver wat het eerste deel betreft slechts in ondergeschikte punten, en wat het tweede deel betreft slechts in enkele kleinigheden af van de derde drukken.

Dit moge de schrijver beweren, de belangstellende deskundige lezers, vooral diegenen die het werk vanaf de eerste druk hebben zien groeien, staan vol bewondering voor de gestadige uitbouw van dit werk, niet gemeten naar het aantal pagina's, maar naar inhoud op wetenschappelijke en didactische waarden.

Bij het doorlezen van de derde druk hebben wij nog eens alle vroegere drukken ter hand genomen en konden wij vooral de eerste druk nog beschouwen als pionierswerk, om in onze literatuur althans één degelijk werk voor de studie L.O. en de aanvang voor K. I. te hebben, het werk is nu uitgegroeid tot naar wij mogen zeggen een standaardwerk van de Lagere Algebra, dat de toets van strenge wetenschappelijke critiek kan doorstaan maar bovendien uitmunt door didactiek en door de bewerking van de theorie en de uitwerking van vele vraagstukken vol is van instructieve waarden voor de studeerenden.

Na deze inleiding zal men van ons dan ook eigenlijk niet veel critiek meer verwachten en de enkele opmerkingen die wij nog willen plaatsen willen wij dan ook slechts beschouwd zien als kantteekeningen, welke wij bij het gebruik van dit werk zelf opvolgen.

Wat het eerste deel betreft moet ons echter vooraf nog een opmerking van het hart, bedoeld als goede raad voor studeerenden L.O. om hen te wijzen op een al te veel gemaakte fout. Velen beginnen hun studie L.O. (of aanvang voor K. I.) en hebben dan reeds eenige bekendheid met de techniek van de lagere algebra d.w.z. met eenige van de „Algebraische grootheden en hun bewerkingen" en zij vangen direct aan met deel II. Dit is o.i. een kardinale fout die reeds velen duur te staan is gekomen

In die „techniek" zit immers ook heel wat theorie en deze theorie moet behoorlijk gefundeerd zijn. Lagere Algebra I nu geeft dit fundament en daardoor aan de studeerenden een goede basis voor de studie van wat zij dan veronderstellen de eigenlijke L.O.-stof te zijn.

Bij deel I is, wat verbeteringen en veranderingen betreft, het volgende op te merken.

De „volgorde der bewerkingen" is verdwenen en, naar de schrijver zich uitdrukt, vervangen door iets wat kort en goed duidelijk is. Een kleinigheid, inderdaad juist, maar men moet toch maar het initiatief nemen om met zulke kleinigheden voor den dag te komen. Uit oogpunt van didactiek voortreffelijk. De benaming algebraische getallen is vervangen door de benaming relatieve getallen, omdat men in de Wiskunde onder een algebraisch getal eigenlijk iets anders verstaat. Maar dan toch weer dezelfde opmerking als boven. En zoo is het vele malen in de werken van Wijdenes; hoe dikwijls treft het ons niet, hoeveel sleur door deze werken verbroken is.

De theorie van de relatieve getallen is herzien. De Schrijver raadt studeerenden aan deze theorie (pag. 17—34) enkel door te lezen. Wij kunnen ons bij deze raad aansluiten, mits dit gedeelte zoo tegen het

beeindigen van de L.O.-studie nog eens grondig wordt herlezen ter verdieping van de begrippen. Bijzondere zorg is in deel I besteed aan de „Reststelling" (pag. 96—110), welke theorie nu sterk afwijkt van de behandelingswijze in de vorige drukken, maar veel in diepte en scherpe omlijning van de begrippen heeft gewonnen. Wij wijzen hier vooral op de invoering van de begrippen „overeenstemmende geheele vormen in x" en „identieke geheele vormen in x" (pag. 100).

Studeerenden worden nog verwezen naar het artikel „Uitbreiding van de Reststelling" door P. Wijdenes in het N.T.v.W., jaarg. 19, pag. 225 e.v. Bij de breuken is de behandeling van schijnbaar onbepaalde vormen (pag. 149) wat gewijzigd en scherper geformuleerd.

Bij de complexen zijn wat voorbeelden verdwenen, die in het tweede deel bij de binomiaalvergelijkingen echter weer tot hun recht komen. Verderop komen wij hierop nader terug.

Papier en band zijn bij deel I nog van ouderwetsche kwaliteit.

In het voorbericht van de derde druk van deel II schreef Wijdenes:

„In dit boek wordt de uiterste zorg besteed aan het aanbrengen van heldere begrippen door een zuivere theorie."

Dit streven wordt nog eens extra beklemtoond door enkele verbeteringen die bij de nieuwe druk van deel II zijn aangebracht. De voornaamste verbeteringen vindt men in de behandeling van afhankelijkheid en strijdigheid in een stelsel lineaire vergelijkingen en in het opnemen van de eigenschappen van limieten met eenvoudige bewijzen.

Vooral de op pag. 46—50 uitgewerkte algemeene methode voor het oplossen van p lineaire vergelijkingen met q onbekenden, zal niet alleen studeerenden veel diensten bewijzen, maar ook aan docenten die opleiden voor L.O. tot groote steun kunnen zijn, daar het duidelijk uiteenzetten van deze stof niet zoo gemakkelijk is.

Bij de eigenschappen van de limieten (pag. 250—253) is die mate van strengheid betracht, welke voor L.O. voldoende moet worden geacht. Enkele kantteekeningen die wij bij het door lezen van dit werk maakten willen wij nog geven.

De overigens zeer fraaie en duidelijk uitgewerkte theorie „Uiterste waarden van een paar symmetrische functies met voorwaarde-vergelijking" (pag. 188—199) zouden wij, wat de eenvoudige gevallen betreft, ook gaarne nog op een andere methode behandeld willen zien door nl. aan de grafieken een rol toe te kennen, waarbij deze methode dan verwerkt zou moeten worden in de par. 64 t.m. 67.

Bij het geval $Y = x + y$ met $xy = \alpha$ komt de scheve hyperbool, waarbij de dan gevolgde methode op instructieve wijze is uit te breiden voor het geval $Y = x + y + z$ met $xyz = \alpha$. Dit geval voert, na het stellen van $z = X^2$ tot het beschouwen van de grafiek van de functie: $Y = \dfrac{2\sqrt{\alpha} + X^3}{X}$ en het bepalen van de waarde van X, waarvoor Y een extreem heeft. Is k de waarde van het extreem, dan voert snijding van de grafiek met $Y = k$ tot de identiteit:

$$X^3 - kX + 2\sqrt{\alpha} \equiv (x - p)^2 (x - l),$$

waaruit volgt: $k = 3\sqrt[3]{\alpha}$, $p = X = \sqrt[6]{\alpha}$.

Het geval $Y = xyz$ met $x + y + z = \alpha$ voert tot het beschouwen van de functie: $Y = \dfrac{z^3 - 2\alpha z^2 + \alpha^2 z}{4}$ en de identiteit:

$$z^3 - 2\alpha z^2 + \alpha^2 z - 4k \equiv (z-p)^2(x-l).$$

In par. 50 (pag. 213—218), handelend over de „Binomiaalvergelijkingen", vinden wij de beperking, opgelegd aan de voorbeelden van het hoofdstuk „Complexe getallen" uit deel I, weer rijkelijk goed gemaakt, maar toch zouden wij hierbij een opmerking willen maken. In deel I is nl. nagegaan, wat in het complexe vlak de meetkundige beteekenis is van de verschillende bewerkingen met complexe getallen, maar een direct gebruik, behalve dan als illustratie van een oplossing, wordt hier weinig van gemaakt. Toch leende het voorbeeld 5 op pag. 217 zich uitstekend hiertoe. In dit voorbeeld wordt gevraagd op te lossen de vergelijking:

$$(x+i)^6 + (x-i)^6 = 0.$$

Van dit vraagstuk worden 2 oplossingen gegeven, waaraan wij echter gaarne de volgende zagen toegevoegd.

Stel, $z = \frac{x+i}{x-i}$, hetgeen voert tot: $z_k = \cos \alpha_k + i \sin \alpha_k$ $(k = 1, 2 \ldots . 6)$.

Is A het punt (1,0) en C het beeldpunt van z_k, dan stellen de gerichte diagonalen van de ruit op OA en OC beschreven, de complexe getallen $(z+1)$ en $(z-1)$ voor. Daar vermenigvuldiging van $(z+1)$ met i een argumentsvermeerdering geeft van 90°, blijkt dus dat $x_k = \frac{i(z_k+1)}{z_k-1}$ reëel is. De waarde van x_k lezen wij dan uit de figuur af, en wel: $x_1 = \operatorname{cotg} 15°$, $x_2 = \operatorname{cotg} 45°$, enz.

Wij zouden ook een voorbeeld als het volgende op zijn plaats achten. Gegeven: $x^3 + 1 = 0$. Gevraagd: De vergelijking op te stellen met wortels $x_k + 2\,x_l$, $(k, l = 1, 2, 3)$, onder directe toepassing van de afbeelding in het complexe vlak.

Bij de grafische voorstelling van de termen van een meetkundige reeks (pag. 378) zien wij graag in één figuur alle mogelijkheden afgebeeld, dus ook het geval dat $a < 0$ en de combinaties van $a > 0$ of $a < 0$ met $-1 < r < 0$ en $r < -1$.

Wij wijzen in dit verband op het eerste deel van het 2-de Algebra-vraagstuk van L.O. 1941. De oplossing hiervan leest men dan nl. uit de figuur af.

De „Algemeene Herhaling" is zeer verbeterd door het weglaten van vele vraagstukken, die niet op het peil van het examen Wiskunde L.O. stonden, waarvoor andere, wel op de hoogte, zijn opgenomen. Uitstekende oefenstof voor examencandidaten.

Tot besluit willen wij herhalen hetgeen wij in het begin schreven, nl. dat het werk is uitgegroeid tot een standaardwerk over de Lagere Algebra. Voor studeerenden L.O.-Wiskunde en docenten hiervoor achten wij beide delen onmisbaar. Docenten bij het middelbaar en voorbereidend-hooger onderwijs zouden wij willen aanraden zich Lagere Algebra I en II aan te schaffen. Doorlezing van deze werken zal voor hen niet alleen een genot zijn, maar kan veel bijdragen tot verdieping van het door hen te geven onderwijs. Het kan hen behoeden voor het vervallen in sleur en concessies bij hun lesmethoden en stimuleerend werken op het voortdurend streven naar het bijbrengen van helderheid van begrip gebaseerd op zuivere theorie.

Papier en omslag van deze nieuwe uitgave zijn aan de oorlogsomstandigheden aangepast; de druk op zich zelf is als gebruikelijk door Noordhoff uitstekend verzorgd.

Roermond. Dr. H. A. Gribnau.

Sophie Piccard. *Sur des ensembles parfaits.* Avec une note additionnelle, *Sur les ensembles de sommes* du même auteur. Mémoires de l'Université de Neuchâtel, t. 16. Paris, Gauthier Villars, 1942, pp. 196. Fr.s. 7.50.

Schrijfster, professor aan de universiteit van Neuchâtel, behandelt in dit werk, dat zij aan de Fédération Internationale des Femmes Universitaires heeft opgedragen, de (metrische) structuur en de maattheorie van verzamelingen van de volgende en aanverwante typen: 1o. de verzameling $\mathfrak{A}$ bestaande uit alle niet-negatieve reëele getallen, die in het n-tallig stelsel met uitsluitend de cijfers $a_0, a_1 \ldots . a_k$ geschreven worden, waarbij $a_1, \ldots, a_k$ $(1 \leqq k < n - 1)$ geheele getallen met $a_0 = 0 < a_1, < a_2 < \ldots < a_k \leqq n - 1$ zijn; 2o. de verzameling van alle *afstanden* van elementen van $\mathfrak{A}$; 3o. de verzameling van alle *sommen* van twee tot $\mathfrak{A}$ behoorende getallen; 4o. de analoge verzamelingen behoorende bij de doorsnede A van $\mathfrak{A}$ met het interval $<0, 1>$ en 5o. de doorsneden van verzamelingen A en de daaruit door translaties ontstane verzamelingen.

INGEKOMEN BOEKEN.

Dr N. G. DE BRUYN, Over modulaire vormen van meer veranderlijken. Academisch proefschrift. (Cum laude).

Van P. Noordhoff, Groningen:

J. VERSLUYS, Vlakke driehoeksmeting met vraagstukken, 123 blz., 34 fig., **19e druk** . . . . *f* 1,90*

P. WIJDENES, Algebra voor M.U.L.O. II. Examenuitgave **B 15e druk** met de gehele nieuwe leerstof, 236 blz. . . . . *f* 2,35*
Algebra voor M.U.L.O. I, **33e druk** . . . . *f* 1,45*

Prof. Dr J. G. RUTGERS, Inleiding tot de Analytische Meetkunde I. Het platte vlak, **3e druk**, 366 blz., 120 fig. . . . . *f* 7,00*
Dit boek is het boek voor de akte Wiskunde M.O. K I en voor de 1e jaars Universiteit.

Van Nicola Zanichelli, Bologna:

FRANCESCO SEVERI E GIUSEPPE SCORZA DRAGONI. Lezioni di Analisi, vol. II, parte I, 398 blz. en vele figuren . . Lire 100
I. Serie di funzioni nel campo reale a nel campo complesso.
II. Prime applicazioni geometriche del calcolo differenziale.
III. Integrali definiti e indefiniti.
IV. Methodi d'integrazione.
V. Derivate e differenziali per le funzioni di piu variabili.
VI. Integrali curvilinei e di campo.
Een werk, dat als de andere boeken van Severi, ten zeerste kan worden aanbevolen.

Van den schrijver
Ir W. J. VOLLEWENS c.i. Repetitie-dictaat Anatytische Meetklnde B. De ruimte. 169 blz., 154 vraagstukken met de antwoorden. Uitgave van Waltman Delft . . . . f 2,95*

Inhoud:

I. Coördinaten; vergelijkingen.
II. Het platte vlak.
III. De rechte lijn.
IV. De bol.
V. Meetkundige plaatsen; kegels; cylinders; omwentelingsoppervlakken; regelvlakken.
VI. Tweede graadsoppervlakken.
VII. De algemene vergelijking van de tweede graad.
VIII. Pool en poolvlak; toegevoegde vlakken en rechten; symmetrievlakken; hoofdvlakken.
IX. Aanvullingen.

Geschreven voor „Delft" is het boek nochtans ook bijzonder aan te bevelen voor repetitie K V; ook voor hen, die een kort overzicht van de „ruimte" wensen te bezitten.

INHOUD VAN DE 19e JAARGANG 1942/1943.

Verantwoordelijk voor de gehele inhoud:
P. Wijdenes te Amsterdam, Jacob Obrechtstraat 88.
Verantwoordelijk voor de advertenties: Drs. F. C. Noordhoff.
Uitgever: P. Noordhoff N.V. te Groningen.
Verschijnt zes maal per jaar, abonnementsprijs *f* 6,30* per jaar.
Prijs per nummer *f* 1,55*.
Drukker: Drukkerij Gebroeders Hoitsema te Groningen. K 1219.

P 1037/4.